OPERAÇÕES SEMIOCOGNITIVAS MOBILIZADAS EM TAREFAS DE GEOMETRIA: UMA ANÁLISE COM ALUNOS MEDALHISTAS DO 8º ANO

Mobilized semiocognitive operations in geometry tasks: an analysis with grade 8 medalist students

Adilson de Campos

Méricles Thadeu Moretti

Resumo

O presente estudo, ao fazer uso de uma metodologia qualitativa (inscrita em um paradigma interpretativo), tem por objetivo identificar e compreender certas operações semiocognitivas (apreensões, olhares e relevância da dimensão) mobilizadas por alunos medalhistas de 8º ano na resolução de três tarefas de geometria (perímetro e área). O estudo foi realizado por meio da análise documental de três produções escritas de dois alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. A partir da análise dos dados com suporte na Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval, as conclusões evidenciam uma sinergia na mobilização das apreensões (perceptiva, discursiva, operatória e sequencial), no uso de olhares não icônicos e na mudança de dimensão em que os alunos conseguem ver nas figuras, de forma proficiente, dimensões diferentes daquelas que foram, inicialmente, dadas nas tarefas.

Palavras-chave: Aprendizagem de geometria; Ensino Fundamental; Operações semiocognitivas em geometria; Registro de Representações Semiótica.

Abstract

The present study, by making use of a qualitative methodology (inscribed in an interpretive paradigm), aims to identify and understand certain semiocognitive operations (apprehensions, looks and dimension relevance) mobilized by grade 8medalist students in solving three tasks of geometry (perimeter and area). The study was carried out through the documentary analysis of three written productions by two students from the 8th year of Elementary School. From the data analysis supported by Raymond Duval's Theory of Semiotic Representations, the conclusions show a synergy in the mobilization of apprehensions (perceptive, discursive, operative and sequential), in the use of non-iconic perspectives and in the change of dimension in which the Students can see in the figures, proficiently, dimensions different from those that were initially given in the tasks.

Keywords: Learning geometry; Elementary School; Semiocognitive operations in geometry; Register of Semiotic Representations.

Introdução

O estudo da geometria tem recebido cada vez mais atenção dentro do currículo de Matemática. Lorenzato (1995), ao justificar a sua importância, refere que sem o estudo da geometria as pessoas não desenvolvem o pensamento geométrico e o raciocínio visual, habilidades sem as quais dificilmente uma pessoa conseguirá resolver muitas das situações cotidianas (que podem ser geometrizadas).

> Também [as pessoas] não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano. Sem conhecer Geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. (LORENZATO, 1995, p. 5)

Devido à sua importância dentro do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, a geometria converte-se em uma importante área de inquérito para a Educação Matemática. Jones e Tzekaki (2016), em um estudo que investigou as principais ênfases da pesquisa neste domínio no âmbito do PME (*International Group for the Psychology of Mathematics*

Education) de 2005 a 2015, refere como áreas principais: (i) o raciocínio espacial; (ii) visualização geométrica e pensamento visual; (iii) raciocínio geométrico e prova; (iv) conhecimento geométrico dos alunos; (v) conhecimento geométrico e desenvolvimento profissional dos professores e (vi) ensino de geometria e tarefas.

O estudo aqui apresentado tem como foco o conhecimento geométrico e as aprendizagens dos alunos. Nesse ínterim, a investigação focada nas aprendizagens da geometria deve considerar também as representações matemáticas. Isso porque devido à natureza abstrata da Matemática (em geral, e da geometria em particular), o acesso do aluno aos objetos matemáticos (e geométricos) se dá de modo exclusivo por meio das representações desses mesmos objetos, uma vez que "as representações incorporam características importantes das estruturas mentais e ações matemáticas" (NCTM, 2017, p. 24).

Dentro desse quadro que se propõe analisar o conhecimento e as aprendizagens da geometria, a Teoria dos Registros Semióticos de Duval tem sido cada vez mais considerada como arcabouço teórico em muitos estudos conduzidos no domínio (JONES e TZEKAKI, 2016). O presente estudo se soma a este esforço e ao fazer uso da Teoria dos Registros Semióticos de Duval tem por objetivo identificar e compreender as operações semiocognitivas (apreensões, olhares e relevância da dimensão) mobilizadas por alunos medalhistas de 8º ano na resolução de três tarefas[1] de geometria (perímetro e área). Os dois alunos considerados são alunos de escolas catarinenses premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

[1] As duas primeiras tarefas foram extraídas do material de apoio da 12ª edição do PIC – Programa de Iniciação Científica da OBMEP. A terceira tarefa foi uma das questões da prova de 2ª fase (Nível 2) da OBMEP do ano de 2012.

Quadro Teórico

A Teoria das Representações semióticas de Duval

Aspectos gerais

Para Duval (2006), os objetos matemáticos não podem ser percebidos ou observados diretamente por meio de instrumentos. Com efeito, o acesso a estes objetos está vinculado ao uso de um sistema de representação: "a única maneira de ter acesso a eles [objetos matemáticos] e lidar com eles é por meio de signos e representações semióticas" (DUVAL, 2006, p. 107).

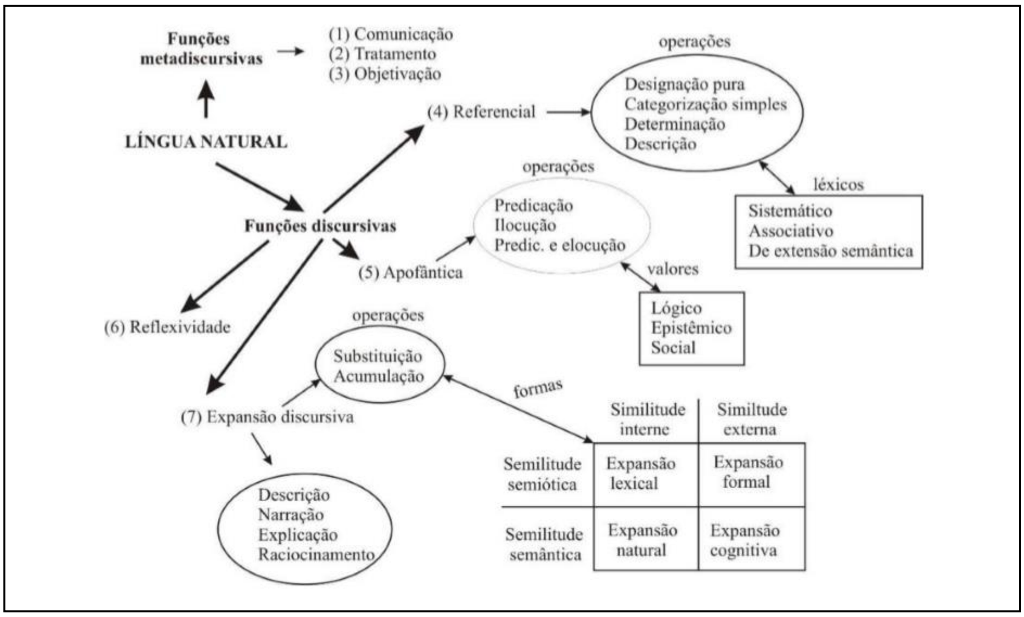
As operações cognitivas relacionadas ao objeto matemático e à sua representação são conhecidas como *semiose* (a produção e a apreensão de uma representação), enquanto a *noesis* está relacionada à apreensão conceitual do objeto. Desse modo, a atividade matemática possui dois lados: (i) um relacionado aos objetos matemáticos e processos válidos utilizados na resolução de problemas e (ii) outro, mais oculto, que é o das operações cognitivas por meio das quais os alunos podem realizar os processos válidos e acessarem um determinado objeto matemático. Desse modo, os registros de representação semiótica e a sua coordenação configuram o que Duval (1999) denominou de *arquitetura cognitiva*, por meio da qual os alunos podem realizar as operações cognitivas que estão subjacentes aos processos matemáticos:

> Em termos concretos, qualquer tarefa ou qualquer problema que os alunos sejam solicitados a resolver requer uma dupla análise, matemática e cognitiva: as variáveis cognitivas devem ser levadas em conta da mesma forma que a estrutura matemática. (DUVAL, 1999, p. 24-25)

Para caracterizar um registro de representação, Duval (1995, p. 20-21) refere que uma representação deve cumprir três atividades cognitivas atinentes a uma representação: (i) a formação de uma representação que seja identificável e que respeite determinadas regras; (ii) o tratamento que permite a transformação do registro, mas circunscrito ao mesmo sistema semiótico e (iii) a conversão que permite a transformação de um dado registro de um sistema semiótico em outro registro pertencente a outro sistema semiótico.

Na visão de Duval (1995) no uso de uma língua, para além das funções metadiscursivas, incidem também as funções discursivas com suas respectivas operações cognitivas. A figura 1 procura dar conta das funções metadiscursivas e discursivas.

Figura 1 – Funções discursivas e metadiscursivas no uso de uma língua



Fonte: Elaborado por Moretti e Brandt (2021, p. 56) a partir de Duval (1995, p. 87 - 136)

Em relação às funções discursivas e suas operações, conforme a figura 1, temos: a função *referencial* (4), utilizada na designação de objetos; a função *apofântica* (5), utilizada para dizer algo sobre os objetos na forma de uma proposição; a função de *reflexividade* (6) que determina o valor ou estatuto de uma expressão e, por fim, a função de *expansão discursiva* (7) que permite articular frases e enunciados, possibilitando que se discorra sobre um assunto de diferentes formas.

Aspectos específicos referentes à aprendizagem da geometria

A aprendizagem da geometria ocupa um lugar de centralidade dentro da Teoria das Representações Semióticas. Segundo Duval (2006), nas atividades cognitivas relacionadas à geometria devemos construir, raciocinar e ver, inseparavelmente. De modo que a geometria constitui "um campo de conhecimento que requer a articulação cognitiva de dois registros de representação muito diferentes: *a visualização* de formas para representar o espaço e a *linguagem* para afirmar propriedades e deduzir novas" (DUVAL, 2006, p. 5). Com a intenção de destacar a importância da geometria, o autor é assertivo: "De todos os campos do conhecimento em que os alunos devem entrar, a geometria é a que requer a atividade cognitiva mais completa, pois solicita gesto, linguagem e movimento" (DUVAL, 2006, p. 6).

As apreensões na aprendizagem da geometria

Segundo Duval (1999, 2012) na aprendizagem da geometria incidem quatro tipos de apreensões: *perceptiva, discursiva, operatória e sequencial*. Tais apreensões possuem especificidades e características próprias. Vejamos de modo pormenorizado cada uma delas.

A *apreensão perceptiva* ocupa uma certa centralidade e pode comandar todas as demais apreensões (MORETTI e BRANDT, 2021). Esta apreensão está relacionada a uma atitude mais imediata e automática: "é o reconhecimento visual imediato da forma" (DUVAL, 2012, p. 118), podendo desempenhar "um papel facilitador ou inibidor sobre a compreensão do problema colocado" (DUVAL, 2012, p. 136). Pode, em determinadas situações, até mesmo estar em conflito com a apreensão *discursiva*, uma vez que esta é mais controlada e relacionada à interpretação discursiva dos elementos figurais.

> Não importa qual figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas; e outra controlada, que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva dos elementos figurais. Estas duas atitudes encontram-se, geralmente, em conflito, porque a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado, assim como os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente. (DUVAL, 2012, p. 120)

A apreensão *discursiva*, por sua vez, depende essencialmente das hipóteses que a figura representa, implicando a "utilização de um vocabulário que é a condensação das definições" (DUVAL, 2012, p. 118). Ocorre que, em muitas ocasiões, os alunos acabam por se apegar demasiado à apreensão perceptiva, fazendo com que passe a exercer um certo domínio em relação às outras (apreensões).

> Estes (os alunos) não se dão conta de que uma figura deve ser olhada não mais do que através ou em função das propriedades, ou das condições formuladas como hipóteses. Isto pode ser observado pelas suas atitudes diante de um problema: eles leem o enunciado, constroem a figura e, em seguida, concentram-se na figura sem retornar ao enunciado. Este esquecimento ou abandono do enunciado marca a ausência da atitude que chamamos de interpretação discursiva da figura. (DUVAL, 2012, p. 124)

A apreensão *operatória*, por sua vez, é uma apreensão focada nas modificações que são possíveis em uma dada figura e nas possibilidades existentes no que tange a organização destas modificações. A tabela 1, a seguir, apresenta os tipos de modificações e as possíveis operações. A apreensão operatória é, sensivelmente, diferente da apreensão perceptiva, isso "porque a percepção fixa à primeira vista a visão de alguma forma e essa evidência as torna firmes" (DUVAL, 1999, p. 19).

Tabela 1 – Tipos de apreensões operatórias da figura

Tipo de modificação figural	Operações que constituem a produtividade heurística	Fatores que interferem na visibilidade
Modificações mereológicas	- Reconfiguração intermediária - Mergulhamento	- Característica convexa ou não convexa das partes elementares
Modificações óticas	- Superposibilidade - Anamorfose	- Recobrimento parcial - Orientação
Modificações posicionais	- Rotação - Translação	- Estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras.

Fonte: Duval (2012, p. 127)

Por fim, temos a apreensão *sequencial*. Esta apreensão, segundo refere Duval (2012), é solicitada de modo explícito em atividades de construção geométrica ou então em atividades de descrição, tendo por objetivo básico a reprodução de uma dada figura.

O papel dos olhares na aprendizagem da geometria

De acordo com Duval (1999), a representação e a visualização estão no centro da compreensão matemática. O autor faz questão de distinguir a diferença entre visão e visualização. A visão, segundo refere, consiste na apreensão simultânea de vários objetos, ao passo que a visualização, ao contrário da visão, "baseia-se na produção de uma representação semiótica" (DUVAL, 1999, p. 13).

> Assim, tanto quanto o texto ou o raciocínio, a compreensão envolve a apreensão de toda a sua estrutura, não há compreensão sem visualização. E é por isso que a visualização não deve ser reduzida à visão, ou seja: a visualização torna visível tudo o que não é acessível à visão. (DUVAL, 1999, p. 13)

Para Duval (2005), a visualização pode ser classificada em duas categorias: *icônica e não icônica*, conforme a tabela 2 a seguir:

Tabela 2 – Dois mecanismos de identificação de objetos a partir das fontes visuais

VISUALIZAÇÃO ICÔNICA		VISUALIZAÇÃO NÃO ICÔNICA	
ISSO SE PARECE ao perfil de um objeto real ou se parece com um conjunto de itinerários ou um deslocamento sobre um terreno ou um modelo típico (etalon). *A figura mantém-se um objeto independente das operações que se pode efetuar sobre ela.*		É uma SEQUÊNCIA DE OPERAÇÕES que permite que se reconheça as propriedades geométricas pela impossibilidade de obter certas configurações ou pela invariância das configurações obtidas. *A figura é uma configuração contextualmente destacada de uma rede de uma organização mais complexa.*	
Olhar Botanista	Olhar Agrimensor	Olhar Construtor	Olhar Inventor

Fonte: Duval (2005, p. 14)

A *visualização icônica* pressupõe o conhecimento de uma forma típica para cada objeto a ser identificado. Nela, "qualquer figura tende a ser uma representação estável ou imutável porque é uma imagem ou representação de um objeto" (DUVAL, 2005, p. 26). A visualização icônica está relacionada a dois tipos de olhares: (i) o *olhar botanista* – trata-se de um olhar mais "qualitativo" que permite o reconhecimento do contorno de formas ou então a diferenciação entre um pentágono e um quadrilátero (por exemplo) e privilegia uma forma típica; (ii) olhar *agrimensor* - está relacionado com a capacidade de medir as bordas de uma superfície e com a capacidade de realizar mudanças de escalas nas grandezas consideradas.

A visualização *não icônica*, por sua vez, permite o reconhecimento das propriedades geométricas e, nessa visualização, "a figura é uma configuração contextualmente destacada de uma rede de uma organização mais complexa" (Duval, 2005, p. 14). A visualização não icônica está relacionada a dois tipos de olhares: (i) o *olhar construtor* – esse olhar permite ao aluno ter a consciência de que uma propriedade geométrica não é, somente, uma característica perceptiva, permite ainda que o aluno possa decompor uma forma com o auxílio de instrumentos; (ii) *olhar inventor* – esse olhar possibilita que o aluno possa adicionar traços auxiliares reorganizadores na figura dada, modificando-a para descobrir um procedimento de resolução.

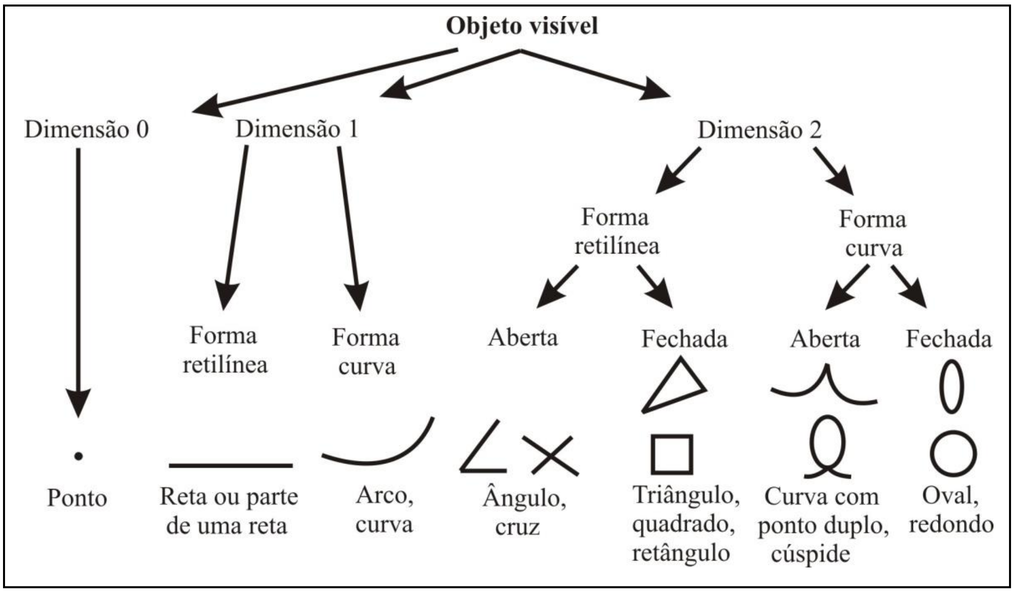
A relevância da dimensão na aprendizagem da geometria

Diretamente relacionada às duas formas de visualização está a chamada desconstrução dimensional. Esta "representa uma revolução cognitiva para o funcionamento espontâneo da visualização icônica e não icônica" (DUVAL, 2005, p. 23). Duval (2005) destaca o papel central da desconstrução dimensional na resolução de problemas:

> Esta desconstrução dimensional das formas é o pré-requisito para uma compreensão eficaz de qualquer afirmação de propriedades geométricas e, portanto, para a sua mobilização eficaz pelos alunos na resolução de problemas. (DUVAL, 2005, p. 26)

Na visão de Duval (2005), a desconstrução dimensional das formas representa um passo intermediário e absolutamente necessário entre o reconhecimento perceptivo (imediato) das formas e a identificação dos objetos matemáticos que lhes são correspondentes. Moretti e Brand (2015, p. 602) sublinham que uma das causas do insucesso em muitos problemas de geometria reside justamente na dificuldade do aluno em olhar uma figura nas dimensões inferiores da qual ela é dada. A figura dois apresenta a classificação realizada por Duval (1995) das unidades figurais elementares:

Figura 2 – Classificação das unidades figurais



Fonte: Duval (1995, p. 159)

Moretti e Brandt (2015) exemplificam que em uma determinada situação problema o aluno pode observar um ponto (de dimensão 0D) em um segmento de reta (dimensão 1D) ou, ainda, como o vértice de um triângulo. Sendo possível também a identificação de figuras de dimensão 1D em figuras de dimensão 2D e assim por diante.

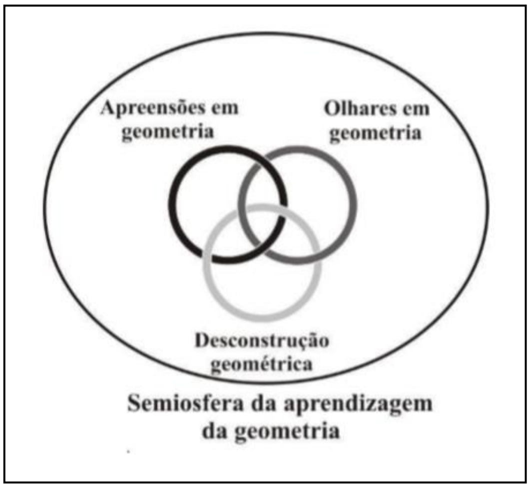
> O modo matemático de ver as figuras consiste em decompor qualquer forma discriminada, isto é, reconhecida como uma forma nD/2D, em unidades figurativas de um número de dimensões inferior ao desta forma. Assim, a figura de um cubo ou de uma pirâmide (3D/2D) é decomposta em uma configuração de quadrados, triângulos etc. (unidades figurais 2D/2D). E os polígonos, por sua vez, são divididos em segmentos de linha (unidades figurais 1D/2D). E linhas, ou segmentos, podem ser divididos em "pontos" (unidades 0D/2D). (DUVAL, 2005, p. 20)

Duval (2005) destaca que os problemas específicos na aprendizagem de geometria não se devem especificamente à visualização (icônica e não icônica) ou à desconstrução dimensional das formas subjacentes, mas, sobretudo, à forma particular como um discurso geométrico pode articular-se com esta visualização. Assim, torna-se incontornável ter em atenção a questão da *identificação* e da *designação* dentro do processo analítico de um discurso geométrico.

A semiosfera da aprendizagem da geometria

Ao considerar as diversas operações semiocognitivas relativas à aprendizagem da geometria, Moretti e Brandt (2021) propõem o construto denominado Semiosfera da prendizagem em geometria (figura 3). Tal construto, muito apoiado na teoria de Duval (1995, 1999, 2005, 2012), destaca a tríade: (i) apreensões em geometria, (ii) olhares (icônico e não icônico) em geometria e (iii) desconstrução geométrica (relevância da dimensão). Tal proposta, juntamente com o papel relevante das funções discursivas, em particular o caso da operação de designação, é considerada no presente estudo no intento de identificar e compreender as operações semiocognitivas mobilizadas pelos alunos na resolução de tarefas geométricas (perímetro e área).

Figura 3 – Semiosfera da aprendizagem em geometria



Fonte: Moretti e Brandt (2021, p. 64)

Alguns estudos empíricos sobre a aprendizagem da geometria

Após essa apresentação sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, com destaque para as questões específicas e concernentes à aprendizagem de geometria, é importante perceber os resultados de alguns estudos empíricos conduzidos nestes domínios, ou seja, estudos focados na aprendizagem de geometria que se utilizaram da referida Teoria.

Kalogirou, Elia e Gagatsis (2013) conduziram um estudo que tinha por objetivo investigar como a visualização e a rotação mental (dois importantes componentes da capacidade espacial) podem se relacionar com a apreensão de figuras geométricas planas. Tendo por base a Teoria dos Registros Semióticos de Duval e através de uma análise estatística, o estudo concluiu pela existência de uma correlação significativa entre a capacidade espacial e a apreensão de figuras geométricas.

Kaur e Sinclair (2014), por seu turno, conduziram um estudo longitudinal focado no desenvolvimento do pensamento geométrico em alunos de 7 e 8 anos. O estudo concluiu que as explorações e discussões conduzidas pelo professor (com a realização de esboços dinâmicos) contribui para que os alunos pudessem fazer a transição da descrição de propriedades informais para a descrição de propriedades mais formais da figura. O estudo também aponta para a transição de um discurso particular para outro, mais genérico, sobre o que é um triângulo.

Alguns estudos recentes conduzidos no país fizeram o uso da Engenharia Didática como aporte metodológico para investigar questões relacionadas à geometria dentro da Teoria das Representações Semióticas. É o caso da dissertação de mestrado de Sabel (2021) e das teses de doutorado de Pasa (2017) e Silva (2018).

Sabel (2021), investigou o papel das funções discursivas no discurso de alunos do ensino médio quando da resolução de problemas. Embora o foco do estudo não tenha sido a geometria, três dos cinco problemas analisados pelo autor foram problemas essencialmente geométricos (áreas e trigonometria no triângulo retângulo). Como resultado, o autor destaca o emprego da função referencial de designação e da função de expansão discursiva, sendo estas recorrentes em todos os discursos analisados.

Pasa (2017), à luz da abordagem de interpretação global das propriedades figurais, problematizou o esboço de curvas de algumas funções com alunos de ensino médio. A autora concluiu que este trabalho possibilitou o reconhecimento, pelos alunos, de unidades básicas simbólicas e da conversão entre elas, sendo que isso foi concretizado sem a necessidade explícita da obtenção da expressão algébrica da função. A autora destaca ainda a importância de um ensino que estimule a comunicação oral e escrita dos alunos quando da resolução de problemas.

Silva (2018), amparado na Teoria das Representações Semióticas de Duval, investigou o ensino e a aprendizagem das superfícies quádricas no ensino superior. O autor concluiu que a mobilização da função referencial e da expansão discursiva foram necessárias para o progresso do discurso bem como para os tratamentos e conversões realizados pelos alunos.

Metodologia

O estudo aqui apresentado faz uso de uma metodologia de natureza qualitativa, inscrita em um paradigma interpretativo (ERICKSON, 2012). O estudo é levado a efeito por meio da análise documental de três produções escritas de dois alunos: Gustavo e José (nomes fictícios), alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de duas escolas da região metropolitana de Florianópolis - SC. Gustavo é aluno da rede pública enquanto José é aluno da rede privada de ensino. Como instrumento analítico complementar, o estudo também se utiliza da análise da transcrição da fala de um aluno durante uma das aula.

A opção pelas resoluções de Gustavo e José como objeto da análise se deu por duas questões básicas: (i) devido ao bom desempenho dos alunos ao longo de todo o curso; e (ii) à forma bastante minuciosa e detalhada com que buscavam apresentar as suas resoluções. Os dois alunos considerados neste estudo fazem parte de uma turma de 10 alunos das séries finais do Ensino Fundamental (4 meninas e 6 meninos) que participaram de um curso de extensão de iniciação científica que tinha por objetivo a preparação para a OBMEP. O curso foi divulgado antecipadamente em algumas mídias sociais e junto aos professores de Matemática de algumas escolas. A inscrição foi realizada pelos próprios alunos e de acordo com os seus interesses. Os encontros síncronos ocorreram fora do período escolar regular dos alunos, tendo lugar no período noturno a fim de contar com a maior presença possível dos alunos.

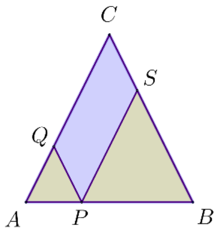
Quanto à operacionalização, o curso foi realizado totalmente à distância (devido à pandemia causada pelo vírus SARS-CoV2), sendo dividido em nove ciclos distintos, cada um dos quais abordando uma temática específica. Dois desses ciclos foram inteiramente devotados à temáticas ligadas à geometria: perímetros e áreas. Cada ciclo tinha duas semanas de duração: (i) na primeira semana o aluno recebia a lista de tarefas, disponibilizada aos alunos na plataforma *google classroom*, cabendo a eles a resolução individual e a postagem (digitalizada) no mesmo ambiente virtual e (iii) na semana seguinte tinha lugar o encontro síncrono via *google meet*, ocasião em que ocorria a discussão das tarefas realizadas. Resumidamente, a parte analítica incide sobre três questões realizadas pelos alunos em dois ciclos diferentes: a primeira questão é referente ao perímetro de figuras planas (ciclo 5) e a segunda e terceira questões se referem à temática área (ciclo 6).

Em relação ao quadro analítico, a análise dos dados foi realizada de acordo com as seguintes categorias: (i) olhares em geometria (olhar icônico e não icônico) e (ii) apreensões em geometria e (iii) desconstrução geométrica. Tais categorias fazem parte do que Moretti e Brandt (2021) chamam de semiosfera do olhar em geometria. No que se refere aos *olhares em geometria* buscamos analisar a incidência dos olhares botanista/agrimensor (icônico) e construtor/inventor (não icônico). Nas *apreensões em geometria*, buscamos proceder à análise dos quatro tipos de apreensões utilizadas pelos alunos aquando da resolução, nomeadamente as *apreensões perceptiva, discursiva, operatória e sequencial*. Por fim, no que respeita à *desconstrução geométrica*, buscamos analisar a relevância da dimensão, de modo específico as mudanças de dimensões realizadas pelos alunos dentro do conteúdo específico estudado. A produção discursiva dos alunos foi ainda analisada tendo em vista as funções discursivas mencionadas na Figura 1, em particular, a função de expansão discursiva e as operações de designação da função referencial.

Análise dos dados

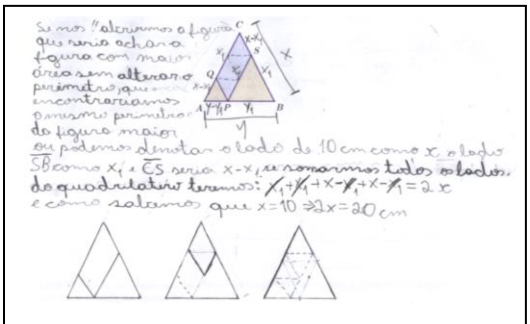
A primeira tarefa proposta aos alunos foi a seguinte:

TAREFA 1. Por um ponto P na base AB de um triângulo isósceles ABC traçamos retas paralelas aos lados congruentes CA e CB, formando desta forma um quadrilátero PQCS. Se CA=CB=10 cm, determine o valor do perímetro deste quadrilátero.



Para esta tarefa, o aluno José apresentou a seguinte resolução:

Figura 1 – Resolução apresentada pelo aluno



José para a tarefa 1

Fonte: Dados da pesquisa

Uma primeira questão a referir em relação à resolução apresentada pelo aluno, e que é absolutamente compatível com a literatura, é a relação de conflito entre as apreensões perceptiva e discursiva:

> Uma vez que um mesmo desenho pode representar situações matemáticas diferentes e, deste modo, servir de suporte intuitivo para diferentes raciocínios, será preciso, deste modo, uma indicação verbal para tomar a figura como suporte de representação de um determinado objeto. Isso quer dizer que o acesso a uma figura é necessariamente discursivo (DUVAL, 1995, p. 189).

Explicitamos melhor esta relação de conflito: o aluno inicia a sua resolução propondo "abrir a figura" e faz isso nas três ilustrações colocadas logo abaixo. Nesse momento heurístico, a apreensão perceptiva parece ser preponderante. Entretanto, ao tentar decompor a figura inicial em triângulos (2ª ilustração), o aluno parece se dar conta de que o ponto P, na base do triângulo, não está, necessariamente, fixo. Com efeito, o ponto P pode "percorrer" a base sem, contudo, ocupar os seus extremos (vértices A e B). Isso parece fazer toda a diferença e é explicitado na terceira ilustração apresentada. A construção dessas três ilustrações também demonstra a mobilização, por parte do aluno, das apreensões operatória e discursiva. No que diz respeito à apreensão operatória, temos uma reconfiguração intermediária levada a efeito por meio de uma decomposição mereológica (a figura inicial é decomposta em subfiguras). Ademais, tal situação corrobora o referido por Moretti e Brandt (2015, p. 600): "uma figura não é o que ela mostra, mas o que é levada a mostrar, em geral, o que está no enunciado".

O aluno então abandona esta tentativa inicial, via decomposição da figura, e busca a solução por uma via mais algébrica, mobilizando de um modo mais nítido a apreensão discursiva. Essa mudança no decorrer da resolução é admitida pelo aluno, que ao ser questionado em aula, responde: "no início da solução eu estava indo por um caminho e depois eu percebi que estava indo para outro". Quando convidado a explicar, com suas próprias palavras, essa segunda parte, o aluno então refere:

Como (o paralelogramo) tem dois pares de lados iguais, então CS é igual a QP, que seria x menos x_1 *... Como o triângulo SPB é isósceles, SB é igual a SP, então SP é igual a x1 ... Como tem outro lado paralelo a ele que é igual, CQ é igual a* x_1 *... então se somarmos tudo isso, teremos, é ...* $x_1 + x_1 + x - x_1 + x - x_1$*, que se somar vai dar 2x ... e, como x é igual a 10, vai virar 20 (cm).*

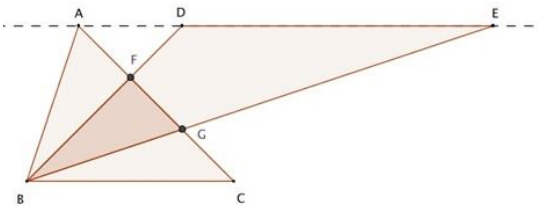
A partir da análise tanto do material escrito quanto da transcrição da fala do aluno é possível depreender que o aluno realizou tanto a identificação quanto a designação, fazendo isso de um modo absolutamente proficiente. No que respeita a mudança de dimensão, o aluno consegue fazer a passagem de 2D para 1D (ao considerar os lados dos triângulos nas relações de paralelismo) e para 0D (ao considerar o ponto P na base AB do triângulo).

No tocante aos olhares mobilizados pelo aluno, é possível identificar o olhar do construtor, principalmente na parte inicial onde ele realiza as construções das três figuras (parece se dar conta de que a propriedade geométrica em questão não é apenas uma característica perceptiva) bem como olhar inventor (presente na segunda parte da resolução). Estas duas formas estão relacionadas a um olhar não icônico. Com efeito, ao compreender a situação por meio de um olhar não icônico, o aluno parece conseguir se “desvencilhar” da figura estática usada para ilustrar a questão e perceber, assim, o seu caráter dinâmico. Em outras palavras, a terceira ilustração parece indicar que o aluno consegue perceber que o ponto P pode se “deslocar” sobre a base, sem, contudo, tomar o lugar dos vértices A e B, e mesmo assim, o perímetro do quadrilátero em questão permanece invariável (igual a 20 cm). Ocorre, a partir daí, a colocação da palavra “ou” (sublinhada pelo aluno) e uma abordagem mais algébrica e generalista é explicitada a seguir. Temos, assim, um exemplo claro da função de expansão discursiva sendo empregada pelo aluno. Essa função permite ao aluno fazer inferências e desenvolver novas informações de um modo articulado e coerente. Desse modo, o aluno consegue fazer a chamada *visualização*, ou seja, estabelecer uma ligação bastante estreita e consistente entre as apreensões perceptiva e operatória.

Por fim, é também de referir à menção que o aluno faz ao termo “área”, sem, contudo, a tarefa solicitar o seu cálculo. O que é solicitado pela tarefa é o cálculo do perímetro. Entretanto, tal situação pode trazer novas possibilidades de discussão a serem dinamizadas pelo professor em sala de aula e que se coadunam com um olhar não icônico e dinâmico. Ou seja, ao se perceber o caráter invariável do perímetro, poderiam ser colocadas novas questões, por parte do professor: i) Dado que o perímetro do quadrilátero é invariável, seria correto supor (ou não) que o mesmo ocorrerá com a área do quadrilátero (explique)? ii) No caso da resposta à questão anterior ser negativa, qual deveria ser a posição assumida pelo ponto P, na base AB do triângulo, para que a área do quadrilátero seja a maior possível (explique)?

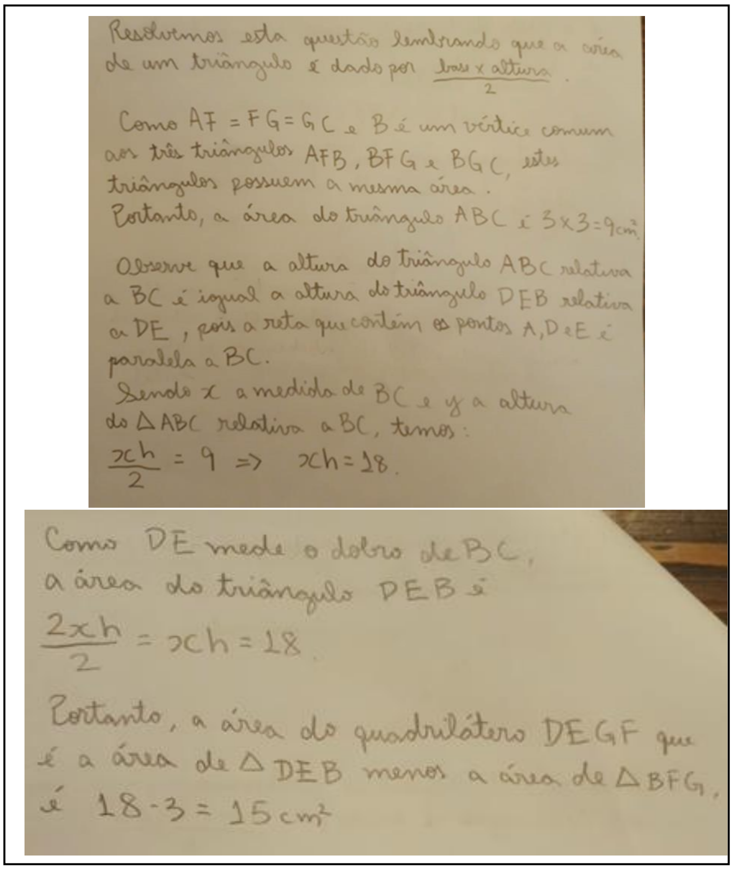
A segunda tarefa proposta aos alunos foi a seguinte:

TAREFA 2. Na figura a seguir o segmento $\overline{BC}$ é paralelo a reta que contém os pontos A, D e E. Sabe-se que os pontos F e G dividem o segmento $\overline{AC}$ em três segmentos de mesma medida e que o segmento $\overline{DE}$ possui o dobro da medida de $\overline{BC}$. Se a área do triângulo BFG mede 3 cm^2, então determine a área do quadrilátero DEGF.



Para esta tarefa, o aluno Gustavo apresentou a seguinte solução:

Figura 2 – Registro da resolução apresentada pelo aluno Gustavo para a tarefa 2



Resolvemos esta questão lembrando que a área de um triângulo é dado por $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$.

Como AF = FG = GC e B é um vértice comum aos três triângulos AFB, BFG e BGC, estes triângulos possuem a mesma área.

Portanto, a área do triângulo ABC é $3 \times 3 = 9cm^2$

Observe que a altura do triângulo ABC relativa a BC é igual a altura do triângulo DEB relativa a DE, pois a reta que contém os pontos A, D e E é paralela a BC.

Sendo x a medida de BC e y a altura do ΔABC relativa a BC, temos:

$\frac{xh}{2} = 9 \Rightarrow xh = 18$.

Como DE mede o dobro de BC, a área do triângulo DEB é

$\frac{2xh}{2} = xh = 18$

Portanto, a área do quadrilátero DEGF que é a área de ΔDEB menos a área de ΔBFG, é $18 - 3 = 15cm^2$

Fonte: Dados da pesquisa

A resolução apresentada pelo aluno Gustavo demonstra uma verdadeira sinergia entre as apreensões perceptiva, discursiva, operatória e sequencial. O aluno inicia a sua resolução fazendo uma referência explicita à fórmula da área do triângulo, designando as suas duas componentes: base e altura. Assim, o aluno faz uso da função discursiva referencial por meio de uma designação. No decorrer da resolução ele identifica, de um modo proficiente, estas duas componentes nos diferentes triângulos considerados.

Outro aspecto a referir, e que, ao nosso ver, é absolutamente incontornável para a correta resolução dessa tarefa se relaciona com o aprender a ver em geometria. Dito de outro modo: no triângulo ABC faz-se necessário, inicialmente, considerar o lado AC como sendo a base do triângulo, pois é justamente esse lado que contém FG e está divido em três partes de mesma medida (de acordo com o enunciado). Por meio desse itinerário se consegue chegar à área do triângulo ABC sabendo-se a área do triângulo BFG. Entretanto, a forma como o triângulo ABC está apresentada na ilustração não é aquela comumente privilegiada no ensino e nos materiais didáticos, ou seja, com a base colocada na parte inferior da figura.

Ao identificar, no triângulo ABC, o vértice B (comum aos triângulos AFB, BFG e BGC) e usando a hipótese de que AF, FG e GC têm mesma medida, Gustavo conclui que esses três triângulos possuem mesma área (por apresentarem base de mesma medida e mesma altura), fazendo com que o triângulo ABC tenha área igual a $9\,cm^2$. Tal linha de raciocínio seguida pelo aluno é um exemplo típico de uma apreensão discursiva. Com efeito, trata-se de uma expansão discursiva levada a efeito por acumulação na qual o aluno consegue "articular diversos enunciados completos na unidade coerente de uma narração, de uma descrição, de uma explicação ou de um raciocínio" (Duval, 2004, p. 94).

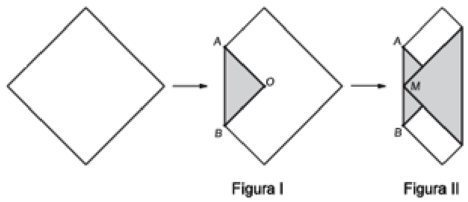
Embora não se trate de um problema de construção geométrica, a tarefa exige para além das apreensões perceptiva, discursiva e operatória, também a apreensão sequencial. Ou seja, primeiro é necessário se chegar à área do triângulo ABC, depois concentra-se na área do triângulo BDE e, por fim, chega-se à solução da tarefa que é a determinação da área do quadrilátero DEGF. O aluno demonstra, também, fazer um uso proficiente da apreensão sequencial.

Na sequência é possível novamente observar a identificação e a designação pelo aluno. Concretamente, ele observa que a altura do triângulo ABC (agora considerando BC como base) é a mesma do triângulo DEB, aludindo como justificativa o fato da reta que contém os pontos A, D e E ser paralela à reta que contém a base BC. Ou seja, que a altura dos dois triângulos em questão é justamente a distância entre estas duas retas paralelas. A seguir, o aluno então designa a medida do segmento BC como sendo *x* e a altura entre as retas paralelas como sendo *y* (embora, no decorrer da resolução, usa *h* para a altura no lugar de *y*). E, fazendo uso de um expediente mais algébrico, conclui que a área do triângulo DEB é igual a $18\,cm^2$. Nessa parte é possível identificar o uso, dentro da função discursiva, da expansão discursiva por substituição. Concretamente: tendo em atenção o triângulo ABC, o aluno conclui que o produto *x.h* é igual a $18\,cm^2$ e, na sequência, substitui esse produto para concluir acerca da área do triângulo DEB. Já ao final, o aluno lança mão de uma reconfiguração intermediária por meio da qual conclui que a área do quadrilátero DEGF é igual a área do triângulo DEB menos a área do triângulo BFG, concluindo que a área solicitada é igual a 15 cm^2.

O olhar exigido para a correta resolução desta tarefa é o olhar não icônico do inventor. No que respeita as mudanças de dimensão realizadas pelo aluno, é possível identificar a passagem de 2D para 1D (quando no triângulo, o aluno considera os seus lados e a distância entre duas retas paralelas) e para 0D (quando ele identifica o ponto B – vértice do triângulo ABC - como sendo o vértice comum dos triângulos AFB, BFG e BGC). Assim, Gustavo consegue olhar a figura nas dimensões inferiores da qual ela foi, inicialmente, dada.

A terceira tarefa proposta aos alunos foi a seguinte:

TAREFA 3. Uma folha de papel quadrada de área 16 cm², branca de um lado e cinza de outro, foi dobrada como indicado ao lado. O ponto *O* é o centro do quadrado (ponto de encontro das diagonais) e M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.



a) Qual é a área da região branca na figura I?

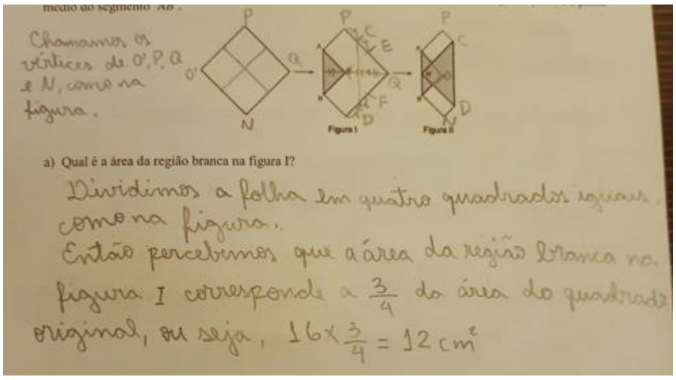
b) Qual é a área da região branca na figura II?

Apresentamos e discutimos a seguir a resolução do aluno Gustavo para o item a) da tarefa.

Gustavo inicia a sua resolução realizando a designação e a identificação de objetos presentes na figura. Concretamente, utiliza léxicos associativos para designar os vértices do quadrado, tomando o devido cuidado para não repetir nenhum léxico (usa O’ para diferenciar de O, já usado na figura). Logo a seguir identifica os vértices (já designados) na figura. Agora, após a devida designação e identificação, tem lugar o processo de resolução propriamente dito.

Na sequência, o aluno faz uso de uma apreensão operatória por meio de uma reconfiguração intermediária (modificação mereológica) na qual realiza a decomposição da figura inicial (quadrado) em subfiguras. Essa apreensão operatória, muito orientada pela apreensão perceptiva, permite ao aluno utilizar-se da apreensão discursiva, fazendo com que progrida no discurso, desenvolvendo o raciocínio e a explicação coerente. É de referir, nesta etapa, a acumulação das informações e a substituição: o aluno realiza a substituição da expressão “¾ da área do quadrado” por “16 x ¾”, concluindo que a área solicitada é de 12 cm^2. Temos, assim, um exemplo claro da sinergia entre as apreensões perceptiva, operatória e discursiva.

Figura 3–Registro da resolução apresentada pelo aluno Gustavo para o item a da tarefa 3


médio do segmento AB.

Chamamos os vértices de O', P, Q e N, como na figura.

a) Qual é a área da região branca na figura I?

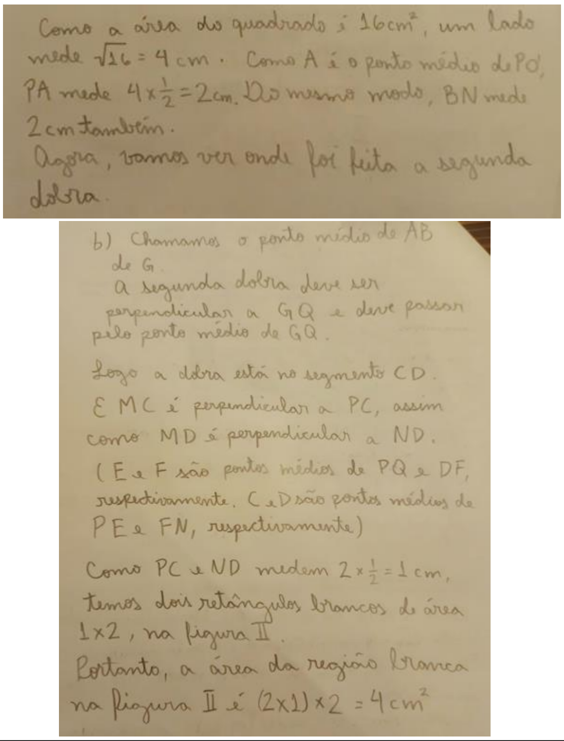
Dividimos a folha em quatro quadrados iguais, como na figura.
Então percebemos que a área da região branca na figura I corresponde a $\frac{3}{4}$ da área do quadrado original, ou seja, $16 \times \frac{3}{4} = 12\ cm^2$

Fonte: Dados da pesquisa

Apresentamos e discutimos a seguir a resolução do aluno Gustavo para o item b) da tarefa.

Nessa segunda parte da resolução, temos novamente um uso bastante orgânico e conectado das apreensões perceptiva, operatória e discursiva. Concretamente o aluno, tendo por base a designação e a identificação realizadas nas figuras I e II, procede a uma verdadeira abordagem argumentativa para responder à questão (área da região branca da figura II).

Figura 4 - Resolução apresentada pelo aluno Gustavo para o item b da tarefa 3.


Como a área do quadrado é $16 cm^2$, um lado mede $\sqrt{16} = 4$ cm. Como A é o ponto médio de PO', PA mede $4 \times \frac{1}{2} = 2$cm. Do mesmo modo, BN mede 2cm também.
Agora, vamos ver onde foi feita a segunda dobra.

b) Chamamos o ponto médio de AB de G.
A segunda dobra deve ser perpendicular a GQ e deve passar pelo ponto médio de GQ.
Logo a dobra está no segmento CD.
E MC é perpendicular a PC, assim como MD é perpendicular a ND.
(E e F são pontos médios de PQ e DF, respectivamente. C e D são pontos médios de PE e FN, respectivamente)
Como PC e ND medem $2 \times \frac{1}{2} = 1$ cm, temos dois retângulos brancos de área 1×2, na figura II.
Portanto, a área da região branca na figura II é $(2 \times 1) \times 2 = 4 cm^2$

Fonte: Dados da pesquisa

Das três apreensões supracitadas, daremos uma atenção especial às diferentes funções conferidas pela *apreensão discursiva*: a) uma primeira função a referir é a *função referencial*. Ela aparece aqui em duas das suas formas: i) a chamada *designação pura* ocorre quando o aluno identifica um signo específico para identificar um objeto: *"Chamamos o ponto médio de AB de G"*; (ii) na chamada *determinação*, o aluno faz uso de artigos definidos para indicar a existência e unicidade de objetos: "a segunda dobra"; (b) a função *apofântica* é identificada quando o aluno cria expressões, no formato escrito, sobre objetos de modo coerente e coeso: *"a segunda dobra deve ser perpendicular a GQ e deve passar pelo ponto médio de GQ"*. Já a *expansão discursiva* tem lugar quando o aluno articula e interliga proposições de modo coerente. Nessa expansão é de destacar o processo de acumulação de informações, levada a efeito por meio do uso de conectores no discurso. O uso desses conectores ocorre, por exemplo, em: *"<u>Logo</u> a dobra ..."; "<u>Como</u> PC e ND ..." e "<u>Portanto</u>, a área ..."*.

O olhar do inventor é requerido para a correta resolução da tarefa. No que respeita à mudança de dimensão, o aluno trabalha na dimensão 2D quando se refere aos quadrados. Mas também consegue fazer, de modo proficiente, a passagem para a dimensão D1 (ao considerar os lados do quadrado) e para a dimensão 0D (quando considera os vértices do quadrado e o ponto médio de um segmento).

Discussão

Convém ressaltar que o foco deste estudo repousa nas apreensões, olhares e na relevância da dimensão em geometria, tendo como arcabouço teórico a Teoria das Representações Semióticas de Duval. Muito embora reconhecemos que os alunos tenham realizado um uso bastante intenso das funções metadiscursivas, estas não foram objeto do nosso estudo, assim como as questões concernentes à congruência semântica (outra temática bastante relevante dentro da teoria supracitada).

Em aspectos gerais e considerando em seu conjunto as três resoluções apresentadas pelos alunos, identificamos, tal como o estudo de Sabel (2021), um destaque significativo para a função referencial. Essa função se deu de modo recorrente e permitiu a designação dos objetos pelos alunos logo na fase inicial das resoluções. Isso fez com que os alunos, durante toda a resolução, pudessem identificar os objetos para, em seguida, desenvolver a sua linha de raciocínio em relação as apreensões, os olhares e a mudança de dimensão da figura.

No que respeita às apreensões, identificamos nas resoluções analisadas que nenhuma das apreensões foi mobilizada pelos alunos de modo isolado. Pelo contrário, identificamos um uso bastante orgânico e sinérgico das apreensões em todas as resoluções analisadas. Entretanto, destacamos que somente por uma questão de ordem analítica, procedemos com uma certa ênfase ora em uma apreensão, ora em outra.

A mobilização harmônica das apreensões perceptiva e discursiva foi necessária para que o aluno pudesse ver a figura geométrica para além das formas que se destacavam (na figura apresentada) ou mesmo das propriedades que lhes eram mais evidentes. Essa mobilização sinérgica das apreensões permitiu conjugar o que era dito (no enunciado da questão) com a figura apresentada. Entretanto, isso nem sempre se deu de modo linear e automático. A primeira questão é um exemplo claro disso. Nessa questão, logo na sua fase inicial de resolução, foi possível identificar uma relação de conflito entre as apreensões perceptiva e discursiva.

Em relação à apreensão operatória, identificamos de modo recorrente a modificação mereológica, levada a efeito por meio de reconfigurações intermediárias (como a decomposição da figura em subfiguras, por exemplo). A reconfiguração intermediária, tal como referem Moretti e Brandt (2015) é um indício bastante forte de que há uma sinergia das várias apreensões na resolução de um mesmo problema. Quanto à apreensão sequencial (mais presente em tarefas de construção geométrica), a identificamos na questão dois em que havia uma certa ordem a ser seguida na resolução, tendo em atenção os dados do enunciado e a figura apresentada.

Quanto aos olhares mobilizados pelos alunos, identificamos os olhares do construtor e do inventor, ambos pertencentes ao tipo icônico. A mobilização de um olhar mais especializado (do tipo icônico) pode estar relacionado ao grau de desenvolvimento dos alunos (alunos premiados em olimpíadas de Matemática), embora compreendamos e destacamos que na organização de tarefas de geometria é preciso considerar desde o olhar não icônico até o olhar icônico. No que respeita à relevância da dimensão, ambos os alunos conseguiram olhar as figuras nas dimensões inferiores das quais elas foram, inicialmente, dadas.

A tabela 2, a seguir, sintetiza as principais informações respeitantes aos aspectos cognitivos e semióticos mobilizados pelos alunos durante a resolução das três tarefas. Conforme pode ser observado, há uma mobilização em todas as três tarefas das apreensões perceptiva, discursiva e operatória. Na tarefa dois também temos a mobilização da apreensão sequencial. Para além da mobilização das referidas apreensões, também destacamos a sinergia com que foram mobilizadas. Os olhares mobilizados foram aqueles relacionados à uma visualização do tipo não icônica, concretamente os olhares construtor e inventor. A mudança de dimensão foi recorrente em todas as resoluções apresentadas, bem como o emprego da designação e da identificação.

Tabela 2 – Síntese dos aspectos cognitivos e semióticos mobilizados pelos alunos nas resoluções das tarefas 1, 2 e 3

TAREFA	APREENSÃO	OLHAR	MUDANÇA DE DIMENSÃO	DESIGNAÇÃO	IDENTIFICAÇÃO
1	Perceptiva, Discursiva e Operatória	Construtor e Inventor	Sim	Sim	Sim
2	Perceptiva, Discursiva, Operatória e Sequencial	Inventor	Sim	Sim	Sim
3	Perceptiva, Discursiva e Operatória	Inventor	Sim	Sim	Sim

Fonte: Os autores

Conclusão

Uma primeira questão a referir diz respeito aos sujeitos desta pesquisa, ou seja, alunos premiados em olimpíadas de Matemática. Mesmo reconhecendo que se trata de um público com habilidades e competências que podem ser diferentes de uma turma ordinária de Matemática, estudos conduzidos com este público podem trazer relevantes contribuições no intento de se compreender, de um modo mais aprofundado, como os alunos mobilizam processos semióticos e cognitivos durante a resolução de tarefas de Matemática (em geral) e de geometria (em particular). Acreditamos que este público possa ser mais considerado em muitas áreas de inquérito da Educação Matemática, especialmente aquelas focadas nos processos de aprendizagem, uma vez que esses alunos produzem textos bastante significativos ao resolverem as tarefas. Assim, esses alunos representam o que Bogdan e Biklen (1994) denominam de bons informantes.

Uma segunda questão a referir é sobre o tipo de tarefas consideradas neste estudo. Realizamos uma escolha bastante cuidadosa do tipo de tarefa a ser proposta aos alunos. Privilegiamos aquelas que não fossem meros exercícios de aplicação de um algoritmo em que a resposta poderia ser conseguida sem maiores esforços por parte do aluno. Optamos, por outro lado, por tarefas com um grau elevado de exigência cognitiva em que uma quantidade significativa de trabalho seria demandada do aluno. Assim, acreditamos que para uma melhor compreensão das operações semiocognivas mobilizadas pelos alunos é parte importante se atentar para o tipo de tarefa a ser considerada.

No que respeita ao objetivo do estudo, foi possível identificar e compreender um pouco mais sobre as apreensões, os olhares e a mudança de dimensão realizados pelos alunos durante a resolução de tarefas sobre perímetro e área. Constatamos uma mobilização em sinergia das apreensões pelos alunos, o uso dos olhares construtor e inventor (ambos não icônicos) e uma proficiente mudança de dimensão, com os alunos conseguindo olhar as figuras nas dimensões inferiores das quais elas foram, inicialmente, dadas.

Por fim, convém destacar como uma mais valia o uso analítico do construto "Semiosfera de aprendizagem em geometria" proposto por Moretti e Brandt (2021). Tal construto permitiu considerar: (i) como as figuras organizaram-se e foram percebidas pelos alunos; (ii) as apreensões que foram mobilizadas; (iii) os tipos de formas, as dimensões das figuras e a passagem entre as dimensões; (iv) a identificação e a designação de elementos figurais e (v) a mobilização dos olhares em geometria. Acreditamos que mais estudos empíricos possam considerar tal construto no âmbito da aprendizagem de geometria a fim de aprimorá-lo ainda mais como instrumento analítico.

Referências

BOGDAN, R. & BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação.** Porto: Porto Editora, 1994.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.** Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking.** In: HITT, F. ; SANTOS, M. (Eds.), Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME, 3-26. 1999.

DUVAL, R. **Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements.** Annales de Didactique et Sciences Cognitives, 2005, v. 10, p. 5 - 53, IREM, Strasbourg.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, n. 61, p. 103-131. 2006.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Méricles T. Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v.7, n.1, p. 118-138. 2012.

ERICKSON, F. **Qualitative research methods for science education**. In: FRASER, B.; TOBIN, K.; MCROBBIE, C. (Org.). Second international handbook of science education. Dordrecht: Springer, 2012, p. 145 –1469.

JONES, K., & TZEKAKI, M. (2016). **Research on the teaching and learning of geometry**. In A. Gutiérrez, G. Leder & P. Boero (Org.). The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues. Rotterdam: Sense, 2016, p.109-149.

KALOGIROU, P., ELIA, I., & GAGATSIS, A. **The relationship between visualization, spatial rotation, perceptual and operative apprehension.** Proceedings of PME 37, 3, 2013, p. 129–136.

KAUR, H. & SINCLAIR, N. **Young children's thinking about various types of triangles in a dynamic geometry environment**. Proceedings of PME 38 and PME-NA 36, 3, 2014, p. 409–417.

LORENZATO, S. (1995). Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**, v.1, n.4, p. 3–13. 1995.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educação Matemática e Pesquisa**, v.17, n.3, p.597-616. 2015.

MORETTI, M. T.& BRANDT, C. F. (2021). Elementos semiocognitivos que perpassam a aprendizagem matemática segundo Raymond Duval. In: RAUEN, F. J., CARDOSO, M. C., FILHO, B. M. A. & MORINI, L. B. M. (Org.). **Linguagem e ensino de ciências e matemática: perspectivas de interfaces.** Formiga (MG): Real conhecer, 2021. p. 53-73.

NCTM. **Princípios para a Ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática.** Lisboa: APM, 2017.

PASA, B. **A noção de infinitésimo no esboço de curvas no ensino médio: por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais**. Doutorado (Tese). PPGECT, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.

SABEL, E. **O papel das funções discursivas na análise da produção de alunos na resolução de problemas.** Mestrado (Dissertação). PPGECT, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2021.

SILVA, S. F. **Ensino e aprendizagem das superfícies quádricas no ensino superior: uma análise baseada na teoria dos registros de representações semióticas com o uso do GeoGebra**. Tese (Doutorado). PPGECT, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.

Adilson de Campos - Doutor em Educação (especialidade Didática da Matemática) - Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal (2021). Professor do Departamento Acadêmico de Linguagem, Tecnologia, Educação e Ciência do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de Santa Catarina – Campus Florianópolis.

Méricles Thadeu Moretti - Doutor em Educação Matemática - Universidade de Estrasburgo, França (1992). Pós-doutor - Universidade de Lisboa. Professor titular em exercício voluntário na Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC. Professor permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica - PPGECT/UFSC.