



Materiales didácticos para aprender matemáticas desde la Pedagogía Waldorf

Daniel Enrique Niño Porras

Luz Andrea Romero Fajardo

Licenciatura en Matemáticas

Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad Pedagógica Nacional

75601: Trabajo de grado

Mg. Lyda Constanza Mora Mendieta

13 de junio de 2023

Dedicatoria

A Dios por darme la sabiduría y fortaleza.

A mi mamá por ser mi ejemplo de lucha y perseverancia, por su amor y apoyo incondicional, por enseñarme a ser resiliente y ser mi motor.

A mi papá por su amor, apoyo y consejos para enfrentar esta etapa de la vida lejos del hogar.

A mi hermano por ser un ejemplo a seguir y apoyarme desde la distancia.

A mi tía por abrirme las puertas de su casa y permitirme estar a su lado.

A mi abuela por estar a mi lado y darme su apoyo mientras Dios lo permitió.

A Daniel por ser mi compañero y amigo, por el tiempo compartido y palabras de aliento, por permitirnos soñar en esto gracias a una tarea en primer semestre.

—Luz Andrea

A mi padre y madre, Jesús y Franci, quienes son unos guerreros que día a día me han brindado su amor, apoyo incondicional y todo lo necesario para seguir avanzando en mi camino. ¡Los amo infinitamente!

A mi segundo papá, William, por haberme motivado a estudiar esta maravillosa labor, la de ser docente.

A mi hermana, Yeraldin, para que te motives a hacer realidad tus sueños y metas.

A Luz, por ser mi amiga, mi equipo en tantos trabajos y tareas, y por seguirme la cuerda en este trabajo de grado tan bonito.

—Daniel

Agradecimientos

Primeramente queremos agradecer a Dios por permitirnos llegar a esta etapa de nuestras vidas.

Por habernos hecho coincidir para ser compañeros y grandes amigos desde primer semestre.

Por darnos la perseverancia, disciplina y empeño para que ninguno desfalleciera por ese sueño que hoy se convirtió en un gran logro. Por llenarnos de fortaleza en los momentos de dificultad y crisis sin permitir que nos rindiéramos.

A nuestras familias por el amor y apoyo durante todo este tiempo, impulsándonos a luchar por las metas propuestas con sus palabras de aliento y sabiduría. Gracias por los valores que se nos fueron inculcados para ser personas responsables y dedicadas en lo que hacemos.

A quienes ya no están presentes en el plano terrenal, pero que siempre guardaremos en nuestros corazones. Porque se fueron con la ilusión de que cumpliríamos nuestros sueños y nos motivaron a ser mejores personas cada día.

A nuestra asesora Lyda, quien siempre nos recibió con una sonrisa sincera y nos calmaba con sus palabras llenas de sabiduría y paz. Por enseñarnos a sacar lo mejor de nosotros con este trabajo. Por ser una excelente guía y enseñarnos a ser no solo en lo académico sino en lo personal desde las reflexiones del amor por lo que elegimos para nuestras vidas.

Te queremos demasiado, ¡infinitas gracias!

A nuestros profes, amigos y compañeros, por manifestarnos su orgullo al vernos elaborar este trabajo. Gracias por los momentos compartidos y la disposición de ayudar cuando fuera necesario. Agradecimientos especiales a Anhuar, Brayán, Lau y Óscar por sus palabras de ánimos.

Contenido

Introducción	7
Capítulo I. Preliminares	10
1.1 Justificación	10
1.2 Objetivos.....	12
1.2.1 Objetivo general.....	12
1.2.2 Objetivos específicos	13
1.3 Antecedentes.....	13
Capítulo II. Marco de referencia	28
2.1 Pedagogía Waldorf.....	28
2.1.1 Historia.....	29
2.1.2 Ciclos educativos y septenios	30
2.1.3 Elementos fundamentales de la pedagogía Waldorf	35
2.2 Matemáticas y pedagogía Waldorf	37
2.2.1 El currículo de Matemáticas en la pedagogía Waldorf	38
2.3 Pensamiento numérico y sistemas numéricos.....	44
2.3.1 Comprensión de los números, sus representaciones y sus relaciones.....	45
2.3.2 Comprensión del significado de las operaciones y sus relaciones.....	46
2.3.3 Hacer cálculos con fluidez y hacer estimaciones razonables.....	47
2.4 Materiales didácticos	49

	5
2.5 Tareas matemáticas.....	52
2.5.1 Componentes de las tareas matemáticas	53
Capítulo III. Marco metodológico.....	55
3.1 Fase diseño.....	55
3.2 Fase de validación.....	59
3.3 Fase de análisis	60
Capítulo IV. Versión final - Guía para educadores matemáticos.....	73
Capítulo V. Conclusiones.....	120
Referencias.....	126
Anexos.....	132
Anexo A.....	132
Anexo B	133
Anexo C	134
Anexo D.....	135
Anexo E	139
Anexo F.....	177
Anexo G.....	189

Lista de figuras

<i>Figura 1.</i> Elementos para describir una tarea matemática. (Gómez, 2018, p. 212).	53
<i>Figura 2.</i> Contexto de la población participante en el diligenciamiento del formulario. .	60
<i>Figura 3.</i> Respuestas relacionadas con la presentación de la cartilla.	61
<i>Figura 4.</i> Decisión de los participantes para evaluar tareas de un nivel específico.	62

Lista de tablas

Tabla 1.	51
Tabla 2	56
Tabla 3	132
Tabla 4	133
Tabla 5	134

Introducción

En el presente trabajo de grado, asociado a nuestro interés por la pedagogía Waldorf en el transcurso como estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, surgió la idea de elaborar una propuesta de tareas matemáticas para desarrollar pensamiento numérico y enseñar sistemas numéricos en estudiantes de educación primaria y secundaria, haciendo uso de material didáctico propio de la pedagogía Waldorf. Esto, a partir de una tarea desarrollada en los primeros semestres de nuestro paso por el programa, en la cual nos encontramos con este modelo pedagógico poco conocido por nosotros.

Los principales documentos utilizados fueron escritos por los autores: Pita y Samboní (2012), Gómez (2018), Abambari y Bermeo (2019), Valencia (2020), Marques y Pontin (2021), y Torres y Casallas (2021). Estos contribuyeron a dar estructura a los elementos fundamentales que tomamos en cuenta en la consecución del propósito de este trabajo. A partir de lo anterior proponemos cuatro tareas, las dos primeras para ser implementadas en la educación básica primaria y las dos últimas para grados de educación básica secundaria.

El documento que presentamos está dividido en cinco capítulos, así:

- **Preliminares:** este capítulo incluye la justificación de la propuesta de diseño de tareas enfocadas en algunos temas del pensamiento numérico y sistemas numéricos a partir de la pedagogía Waldorf. También incluye los objetivos propuestos para el desarrollo del trabajo de grado y los antecedentes que consideramos de mayor relevancia relativos al tema de interés. Estos fueron seis trabajos de grado (de pregrado y posgrado a nivel nacional e internacional) y cinco referencias asociadas al pensamiento numérico y sistemas numéricos, seleccionados a partir de la búsqueda en Google Académico, Dialnet y Funes.

- **Marco de referencia:** a partir de diferentes textos consultados y la información obtenida mediante una entrevista informal realizada a una profesora en ejercicio con formación y experiencia sobre la pedagogía Waldorf en Bogotá D.C., este capítulo está organizado en cinco secciones: (1) Pedagogía Waldorf, en la que presentamos en qué consiste este modelo pedagógico, su desarrollo a partir de su historia, sus principios y métodos, y cómo se caracterizan los estudiantes. (2) Matemáticas y pedagogía Waldorf. En esta sección damos cuenta de relaciones encontradas entre las matemáticas y esta pedagogía, además de cómo se favorece y desarrolla la enseñanza de las matemáticas en la pedagogía Waldorf. (3) Pensamiento numérico y sistemas numéricos, a partir de algunos referentes curriculares nacionales e internacionales, pasando por la comprensión de número, el significado de las operaciones y algunos procesos involucrados. (4) Materiales didácticos, abordados según su uso en el aula. (5) Tareas matemáticas, a partir de algunos de los componentes propuestos por Gómez et al. (2018) que consideramos relevantes para el diseño de las tareas presentadas en este trabajo.
- **Marco metodológico:** en este capítulo describimos las fases de diseño, validación y análisis seguidas para desarrollar las tareas propuestas; realizamos una valoración de cada una de estas tareas mediante un formulario virtual dirigido a profesores de matemáticas, profesores en formación e interesados en la enseñanza de las matemáticas.
- **Guía para educadores matemáticos, propuesta final:** en este capítulo presentamos la versión final de la cartilla “*Tareas matemáticas con materiales didácticos de la*

pedagogía Waldorf para desarrollar el pensamiento numérico en estudiantes del segundo y tercer septenio”, que atiende a las decantadas en la fase de validación.

- **Conclusiones:** presentamos las conclusiones en relación con los objetivos alcanzados, los aprendizajes obtenidos durante el proceso de investigación, el diseño de las tareas y la escritura de este trabajo de grado. Adicionalmente, dejamos algunas cuestiones abiertas de interés para una futura indagación.

Capítulo I. Preliminares

En este primer capítulo presentamos la justificación y objetivos, con los cuales pretendemos, en una primera parte, contextualizar al lector respecto a qué, para qué y por qué elaboramos este trabajo de grado asociado a un asunto de nuestro interés profesional. Finalmente, damos cuenta de los antecedentes relacionados con los temas centrales de nuestro objetivo.

1.1 Justificación

Este trabajo nace a partir de nuestro interés y gusto por las líneas de Pedagogía y Aritmética, ya que durante nuestros semestres académicos en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) hemos realizado trabajos en relación con estas líneas que nos han parecido bastante interesantes, los cuales han generado en nosotros un sentido y una necesidad por proponer una enseñanza diferente a la que recibimos en nuestra educación básica.

Decidimos enfocarnos en la pedagogía Waldorf, ya que en nuestro primer semestre, en el curso de Aritmética, nos correspondió diseñar o adaptar una tarea que se pudiera mostrar al público como una forma de enseñar y aprender algún tema de las matemáticas de forma distinta a lo tradicional. En consecuencia, encontramos un artículo de Mersenne (2015) en el cual la autora expone su interés para ayudar a las personas a cambiar su forma de pensar sobre lo que es el aprendizaje, mostrando distintas maneras de aprender matemáticas a través del juego. En este caso particular, ella adapta la idea de un profesor sobre una forma de aprender las tablas de multiplicar haciendo uso de lo que denominan "*Círculo de multiplicación Waldorf*", dibujado en el tablero de las aulas de clase. Sin embargo, Mersenne (2015) logró materializar esta herramienta, de la cual compartió en su artículo un paso a paso de la construcción, para que los niños pudiesen tener una interacción y exploración directa mediante la manipulación.

Continuando con la anterior idea, procedimos a construir y explorar este material para encontrar relaciones matemáticas entendiendo su uso, y así proceder a pensar cómo podríamos enseñarles a nuestros compañeros las tablas de multiplicar usando este objeto. Con base en lo mencionado, logramos en ese entonces realizar una producción escrita (Niño, Romero y Sánchez, 2018), en la cual consignamos la explicación sobre el uso de este material para practicar las tablas de multiplicación, los resultados y propiedades que obtuvimos en la exploración y observación realizadas.

Con el interés de profundizar en esta iniciativa y deseando compartir tareas similares a esta con educadores y futuros educadores matemáticos, vimos una oportunidad en estas ideas para atender a los requerimientos del currículo de matemáticas que se enfocan en una formación matemáticamente competente para los estudiantes.

Partiendo de esto, creímos que sería interesante proponer una forma de enseñar algunos temas de lo correspondiente al pensamiento numérico y sistemas numéricos haciendo uso de materiales didácticos basados en la pedagogía Waldorf, ya que como menciona Uicab (2009), “los materiales didácticos son usados para apoyar el desarrollo de los estudiantes en aspectos relacionados con el pensamiento, el lenguaje oral y escrito, la imaginación, la socialización, el mejor conocimiento de sí mismo y de los demás” (p. 1011). De esta manera, reconociendo una de las más importantes funciones de los materiales didácticos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, quisimos explotar el potencial de algunos recursos didácticos de la pedagogía Waldorf explorando e identificando temas que permitan proponer tareas en relación con el pensamiento numérico y sistemas numéricos para promover en los estudiantes un aprendizaje significativo.

Además, consideramos importante mencionar que, enfocados en esta pedagogía, no solo se impartiría un conocimiento específico, sino que los estudiantes se situarían en un proceso de formación integral en el cual, inicialmente, se desarrollen como seres sociales, exploradores, artistas, genuinos y autónomos en su libre aprendizaje; y luego, de acuerdo con los principios de esta pedagogía, se promueva, en cada uno de los estudiantes, la idea de desarrollar confianza en sí mismos, gracias a la autonomía que se les brinda a los educandos en el aula de clase, y que, además, les permiten los materiales didácticos mediante la exploración y el descubrimiento.

Finalmente, mediante la búsqueda de recursos para el planteamiento de la propuesta, encontramos que la investigación en relación con este tipo de pedagogía es nula en la Licenciatura en Matemáticas de la UPN. En la Facultad de Educación hallamos algunos documentos relacionados con la pedagogía Waldorf; sin embargo, estos no se relacionan con las matemáticas. De acuerdo con lo anterior, nos parece pertinente dar a conocer, tanto a profesores como a pares académicos, este trabajo y los resultados y conclusiones que logramos obtener al llevar a cabo este trabajo de grado.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Compartir tareas para la enseñanza de algunos tópicos del pensamiento numérico y sistemas numéricos que involucren material didáctico manipulativo basado en la pedagogía Waldorf, que apoyen la comprensión del significado de los números, las operaciones y sus relaciones.

1.2.2 *Objetivos específicos*

- Diseñar y adaptar tareas matemáticas para desarrollar pensamiento numérico y enseñar sistemas numéricos con uso de material didáctico de la pedagogía Waldorf en la educación básica primaria y secundaria.
- Reconocer el papel del material manipulativo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y su aporte en la construcción de conocimiento en los estudiantes.
- Determinar y escribir algunas ventajas y desventajas del uso de material didáctico basado en la pedagogía Waldorf, analizados para los tópicos abordados en relación con el pensamiento numérico y sistemas numéricos, a partir de los resultados y conclusiones obtenidas en la validación de las tareas propuestas.

1.3 Antecedentes

A continuación, presentamos algunos documentos en los que se aborda la pedagogía Waldorf y el uso de materiales didácticos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el aula de clase, hallados mediante el buscador *Google Académico* y las bases de datos libres *Dialnet* y *Funes*, con las palabras clave “Pedagogía Waldorf y Matemáticas”.

- Muñoz (2015), en su tesis de pregrado titulada “*Sistematización de una experiencia pedagógica acerca de las seis relaciones trigonométricas, y la ley de senos y cosenos, realizada en el colegio Luis Horacio Gómez*”, realizó una sistematización de las experiencias y las prácticas en el colegio Luis Horacio Gómez relacionadas con algunos conceptos trigonométricos. Esta institución, cuya estructura curricular está fundamentada en la pedagogía Waldorf, queda ubicada en la ciudad Santiago de Cali, Colombia. El colegio atiende las necesidades del desarrollo humano (parte física y emocional); principalmente se desarrolla la experimentación de los estudiantes de forma vivencial

para la apropiación del conocimiento, según las etapas de desarrollo personal y académico (Muñoz, 2015). La autora reporta el fortalecimiento de la apropiación del conocimiento en temáticas específicas debido al desarrollo de la capacidad de voluntad de los estudiantes.

Muñoz (2015) muestra cómo los estudiantes lograron asociar la ley del seno y del coseno a partir de divisiones de un terreno en formas de triángulos, relacionando estos conceptos con una experiencia concreta, con la finalidad de que los estudiantes no se quedaran con el concepto en abstracto. Para la autora, las matemáticas llegan a ser significativas cuando los estudiantes le dan sentido propio en un contexto asociado o inclusive cuando logran ver su uso de manera palpable, lo cual se dio con una salida pedagógica; esto teniendo en cuenta que las salidas pedagógicas son uno de los principios fundamentales de la pedagogía Waldorf, debido a que los estudiantes aprenden haciendo “desde tres aspectos: desde el pensar, el sentir y el hacer” (Muñoz, 2015, p. 39).

Muñoz (2015) resalta que la experiencia fue interesante ya que una salida pedagógica se presta para que los profesores también descubran cosas nuevas, mediante la experimentación. Según la autora, los estudiantes lograron experimentar las matemáticas de manera tangible, mediante procesos de medición de terrenos y construcción de áreas, permitiendo una mejor comprensión de los contenidos.

- Cruz (2015), en su tesis de doctorado, desarrollada en el marco del programa de Pós-Graduação em Educação Matemática de la Universidade Estadual Paulista en São Paulo, Brasil, titulada “*Formação de Professores no Contexto Das Propostas Pedagógicas De Rudolf Steiner (Pedagogía Waldorf), María Montessori E Da Experiência Da Escola Da Ponte*”, describe cómo es el proceso de formación de profesores en tres contextos; uno, la

Pedagogía Waldorf. El proceso de investigación se dio durante el periodo 2009 - 2013 mediante un trabajo de campo en el que la autora narró su propia experiencia al formarse como profesora en esta pedagogía y realizó entrevistas y conversaciones con profesores de instituciones Waldorf, particularmente.

La autora realizó un recuento histórico del surgimiento de la pedagogía Waldorf y describió algunas de sus características. Además, expuso el enfoque antroposófico para el desarrollo del ser según distintos autores como Steiner, Veiga y Romanelli. En el documento se describe el profesor como un ser que, de manera ideal, debería estar acompañando al mismo grupo de estudiantes durante 8 años de formación educativa y personal de forma constante.

La autora resalta la formación de profesores de matemáticas que ofrece el curso de pedagogía Waldorf. Además, plantea su preocupación por las pocas horas destinadas a la formación matemática, ya que el curso tuvo una totalidad de 954 horas y solo fueron destinadas alrededor de 22 horas para Geometría y Matemáticas, lo que representa un total de 2.3% de la carga horaria del curso (Cruz, 2015).

Los modelos de formación para profesores de matemáticas en la pedagogía Waldorf buscan que estos se empoderen de su conocimiento, gusten de este saber y tengan confianza para enseñarlo. La autora resalta que en esta pedagogía existe una mezcla de dos tendencias en la enseñanza de las matemáticas: la empírico-activista y la formalista-clásica. La primera tendencia se evidencia en la educación primaria, en la que los niños interactúan activamente con su entorno y en esta vivencia construyen conocimiento. La segunda tendencia se hace presente en la educación secundaria, en la que los conocimientos son abstractos y por ende la enseñanza es, de cierta manera, tradicional.

- Abambari y Bermeo (2019), en su tesis de pregrado titulada “*Ambiente de aprendizaje matemático basado en la Pedagogía Waldorf*”, realizaron un trabajo alrededor de las matemáticas con estudiantes de grado octavo de la Unidad Educativa Ricardo Muñoz Chávez en Cuenca, Ecuador, el cual se desarrolló en un ambiente de aprendizaje basado en la Pedagogía Waldorf. Esta propuesta fue llevada a cabo durante 5 sesiones de clase en las que estrategias metodológicas como el juego, el trabajo en equipo y la interacción entre los participantes en el aula tomaron un papel protagónico en el transcurso de dichas sesiones enfocadas en leyes de lógica y en funciones. Los temas abordados fueron: proposiciones, tablas de verdad, lenguaje algebraico, coordenadas en el plano y producto cartesiano entre dos conjuntos.

Según las autoras, los resultados obtenidos mostraron avance en los estudiantes sobre las destrezas exigidas para la asignatura, esto a través de la implementación de un pre - test y un post - test; particularmente, la mediación según la pedagogía Waldorf propició “un rol activo por parte de los estudiantes, construcción de conocimientos y (...) la obtención de aprendizajes significativos” (Abambari y Bermeo, 2019, p. 56). Además, los estudiantes lograron reconocer sus fortalezas y debilidades sobre los temas trabajados durante el desarrollo de estos ambientes de aprendizaje.

Las autoras recomiendan que, al momento de diseñar y desarrollar tareas en el aula de matemáticas, tengan en cuenta aspectos propios de la pedagogía Waldorf como: abordar temas y situaciones significativas para los estudiantes en las cuales se respeten los estilos y ritmos de aprendizaje de cada uno, se dé relevancia a la vivencia sobre la conceptualización, y se reflexione constantemente sobre los aprendizajes de los discentes y las actividades realizadas.

- Valencia (2020), en su tesis de maestría titulada “*Secuencia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la noción de triángulo, mediada por la argumentación y aproximación a la verdad: en el contexto de la Pedagogía Waldorf*”, se centró en el diseño y la puesta en práctica de una secuencia didáctica con la que pretendió desarrollar el método deductivo de demostración aplicado a los triángulos. La intervención se realizó con estudiantes de undécimo grado del Colegio Waldorf Isolda Echavarría en el municipio de La Estrella, Antioquia, Colombia.

La autora abordó en sus clases de matemáticas aspectos de la Pedagogía Waldorf como la narración, el arte, la medición y la comprobación. De esta forma buscó involucrar a los estudiantes en la temática mediante narraciones acerca de la historia de las matemáticas, relacionada con las propiedades y los elementos básicos de los triángulos.

Simultáneamente con las narraciones, la autora utilizó material tangible con figuras triangulares que permitió a los estudiantes hacer “imágenes de sus recuerdos, de lo que trabajó en años anteriores que le será útil para el desarrollo del próximo año” (Valencia, 2020, p. 16), evidenciándose con ello el aprendizaje significativo.

Valencia (2020) obtuvo como conclusiones que “el desarrollo de la unidad didáctica permitió a los estudiantes una aproximación a la demostración desde un enfoque dirigido pero autodeterminado” (Valencia, 2020, p. 69), y les permitió establecer conexiones entre los conocimientos adquiridos en años anteriores y mayor raciocinio al interpretar situaciones geométricas.

- Sánchez (2020), en su artículo “*El entorno como recurso de aprendizaje. Comunicación presentada en experiencias de práctica a distancia*” muestra cómo los estudiantes de la Institución Educativa Distrital Luis Alfonso Valbuena, del municipio de La Vega

Cundinamarca, Colombia, trabajan por medio de proyectos. Estos proyectos fueron desarrollados por medio de la virtualidad; de manera autónoma, los estudiantes realizaron la construcción de materiales concretos para abordar temáticas de geometría y nociones numéricas.

La mayoría del material utilizado para la construcción hacía parte del entorno de los estudiantes. Uno de los materiales a resaltar es la tabla de multiplicación de Waldorf, que no solo sirve para las multiplicaciones, sino que también se permite el desarrollo de actividades geométricas como la construcción de figuras y la presencia del componente artístico. La construcción de este material y uso corresponde a algunas directrices de la pedagogía Waldorf: la interacción con el entorno, el uso de material concreto para el abordaje de temáticas y el trabajo colaborativo que se da con ayuda de la familia, según la descripción dada en el documento.

- Marques y Pontin (2021), en su artículo de investigación *“Matemática viva e reflexiva: vivenciando o ensino da matemática no contexto da pedagogia Waldorf”*, muestran cómo puede ser posible la enseñanza de las matemáticas según la pedagogía Waldorf. Los autores entrevistaron a una profesora de una escuela de la ciudad de Cuiabá, Brasil, con quien tuvieron la intención de revelar asuntos de la enseñanza y el aprendizaje de estudiantes de primer año de educación primaria de esta institución. Marques y Pontin (2021) realizaron lo anterior también con el fin de aportar a una formación de humanos críticos e integrales.

Algunas de las consideraciones de Marques, Pontin y la profesora entrevistada, sobre la Educación Matemática y la pedagogía Waldorf, hacen referencia a que, al abordar algún contenido matemático en educación primaria cobran especial importancia los

movimientos rítmicos, imaginar situaciones a través de lecturas o historias contadas y resolver problemas, que son características de la enseñanza basada en la pedagogía Waldorf. De aquí se resalta la importancia de la euritmia¹, el cuerpo humano y los espacios físicos (aula de clases, patios de la escuela, etc.) como dispositivos para hacer matemáticas.

Como resultados y discusiones de la investigación realizada, los autores lograron establecer dos bloques temáticos para la presentación de los datos: la forma de enseñar matemáticas según la pedagogía Waldorf y la percepción de la profesora sobre el aprendizaje de los estudiantes. En el primero, la profesora desarrolla su práctica de tal forma que exista un equilibrio entre abordar los contenidos previstos en documentos curriculares y la manera cómo se abordan, en la cual se respetan las vivencias y ritmos de aprendizaje de los niños. En el segundo, la profesora dice identificar aprendizaje en los estudiantes cuando los ve cantando o recordando las historias contadas en el momento que se abordó uno u otro tema y, además, observa y reconoce que los niños empiezan a hacer inferencias o exploran para llegar a una respuesta dada, la cual resuelven con mayor destreza y agilidad (Marques y Pontin, 2021).

Los seis documentos anteriores nos permiten identificar ciertos aspectos que vinculan la pedagogía Waldorf con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; estos son:

- La importancia de conectar los saberes teóricos con materiales tangibles, contextos particulares en los que haya una aplicabilidad específica de los saberes o uso del cuerpo y la imaginación de los estudiantes a través de historias o narraciones.

¹ La euritmia se considera un arte escénico en el que las personas manipulan sus gestos, posturas y movimientos para crear música y danza.

- La antroposofía² cobra relevancia en la formación inicial de individuos de escuelas Waldorf para el desarrollo de la espiritualidad y el acceso al mundo suprasensible (más allá de los sentidos) en el cual se encuentran las ideas y objetos matemáticos.
- La construcción del conocimiento a partir de situaciones significativas para los estudiantes, resaltando la vivencia para el aprendizaje y la reflexión sobre los aprendizajes relacionados con las actividades.

También pudimos notar que algunas de las tareas propuestas incluyen temáticas clásicas de las matemáticas; algunas de estas son: demostración de teoremas, uso de relaciones trigonométricas, tablas de verdad y lenguaje algebraico, y en algunas oportunidades son abordadas (o al menos algunos elementos de estas temáticas) de forma tradicional. Esta forma de enseñanza hace que, en ciertas ocasiones, no sean muy evidentes las características o elementos propios de la pedagogía Waldorf. Para una de las profesoras entrevistadas por Cruz (2015) es necesario que en esta pedagogía el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes sea desde adentro hacia afuera, es decir, que los niños construyan su propio conocimiento con la orientación del profesor. Es por esto que, cuando se enseña de una forma tradicional a los estudiantes, ellos no adquieren un significado de los conocimientos matemáticos, ya que se presentan como objetos externos a ellos.

La enseñanza tradicional de las matemáticas se pudo relacionar con la formación de profesores en el marco de la pedagogía Waldorf, ya que según Cruz (2015), la intención del curso de formación de profesores, en matemáticas, es que estos se empoderen del conocimiento matemático. Además, Cruz (2015) se dio cuenta de que las matemáticas que se enseñan en los cursos son universales y únicas, esto quiere decir que su enseñanza posiblemente no se relaciona

² La antroposofía es una filosofía fundada por Rudolf Steiner (fundador de la pedagogía Waldorf) que postula la existencia de un mundo espiritual, accesible a la experiencia humana.

con otras disciplinas y con aspectos culturales. En contraste con lo anterior, en algunos de los trabajos presentados logramos encontrar propuestas de enseñanza, en el marco de la pedagogía Waldorf como por ejemplo los ambientes de aprendizaje adaptados por Abambari y Bermeo (2019), en los cuales los conocimientos matemáticos se abordan de forma diferente a la tradicional.

También notamos que, dentro y fuera del aula de clases, es posible abordar con los estudiantes temas de matemáticas con la perspectiva de la pedagogía Waldorf en distintos niveles escolares. En adición a lo anterior, también vimos, en el marco de esta pedagogía, la importancia del uso de materiales (concretos, didácticos y narrativos) como la tabla de multiplicación Waldorf y los cuentos para la enseñanza de las matemáticas.

Por otro lado, siguiendo la última idea del párrafo anterior, sobre el uso de materiales en la enseñanza y, nuestro interés en el desarrollo del pensamiento numérico y la enseñanza de sistemas numéricos, decidimos buscar información relacionada entre este pensamiento y el uso de materiales didácticos. A continuación, presentamos los siguientes textos encontrados en la base de datos EBSCOHost, el repositorio de la Corporación Universitaria Minuto de Dios y el repositorio de la biblioteca de la Universidad Pedagógica Nacional con las palabras clave “Pensamiento numérico y material didáctico”.

- Pita y Samboní (2012), en su trabajo de pregrado para optar al título de Licenciadas en Matemáticas titulado “*Cuento para motivar el aprendizaje de la adición entre números enteros: Tres Zonas, un misterio*”, proponen un producto literario de ficción que busca contribuir al proceso de aprendizaje de la adición entre números enteros. Su intención al realizar esta propuesta es que este proceso sea desarrollado de forma agradable, en el cual sea el lector, mediante la lectura del cuento, quien descubra cómo se suman números

enteros. La historia de este cuento consiste en que el lector trate de descubrir “el misterio que se esconde tras los saludos de los habitantes de la Estrella \mathbb{Z} cuando van a una fiesta en el Planeta Adón” (Pita y Samboní, 2012, p. 11). La estrella \mathbb{Z} , que representa el conjunto de números enteros, está dividida en tres partes, las cuales se llaman Hemisferio protón, Hemisferio electrón y Gran castillo *Zahl-Null*. Estos se relacionan con sus habitantes, quienes se identifican según la carga que tienen: positiva, negativa o neutra. El misterio se resuelve gracias a un grupo de exploradores de entre los cuales el lector hace parte.

Esta historia fue implementada por primera vez con siete estudiantes de grado séptimo de la Escuela Normal Superior la Inmaculada Guapi, en el municipio de Guapi, Cauca, Colombia, de la cual surgieron unas observaciones por parte de las autoras. Teniendo en cuenta las opiniones de los estudiantes, fueron realizadas ciertas modificaciones que dieron paso a una segunda versión del cuento. En estas modificaciones se procuró dar un papel más protagónico al lector, quien hace parte de la historia como lector-explorador.

Durante los capítulos de este cuento se proponen cinco tareas que son descritas con sus objetivos, con el fin que el lector tome un rol activo en la historia y a su vez que aprenda a sumar números enteros. Como conclusión, las autoras cumplen los objetivos establecidos a partir de las observaciones y los aprendizajes evidenciados en los estudiantes con quienes se implementó el cuento. Pita y Samboní (2012) observaron avances en los estudiantes sobre la comprensión de la adición de números enteros a partir de la apropiación del tema y algunas conjeturas propuestas por los discentes.

- García y Sotos (2015), en su artículo titulado “*Los algoritmos al alcance de la mano. Una aproximación metodológica manipulativa*”, presentan una experiencia educativa en un colegio de Albacete, España, cuyo objetivo principal fue desarrollar una comparación de la forma usual de enseñar las operaciones adición, sustracción, multiplicación y división en \mathbb{Z} , con otra estrategia que implicó material manipulativo para un aprendizaje significativo de los estudiantes de grado segundo. El contraste se dio de manera específica con dos modelos pedagógicos, el tradicional y el constructivista.

La propuesta del trabajo desarrollado en aula se basó en los materiales manipulativos como instrumentos para la enseñanza de las matemáticas, desarrollando en los estudiantes la comprensión, la lógica, la participación y hábitos de investigación. Algunos de los materiales didácticos utilizados para este proceso fueron: las regletas de María Antònia Canals para el desarrollo de relaciones numéricas, la magia para realizar conjeturas y los cuentos como actividad para disfrutar aprendiendo matemáticas; esto para que los estudiantes experimentaran de forma lúdica el aprendizaje esta disciplina (García y Sotos, 2015).

Los autores dejan como reflexión que es evidente el cambio de concepción que tienen los estudiantes hacia las matemáticas, así como el mejoramiento en la comprensión de conceptos matemáticos cuando son abordados con uso de material didáctico y manipulativo.

- Rodríguez (2018), en su trabajo de pregrado, para optar al título de Licenciada en Pedagogía Infantil, titulado “*Pertinencia del juego guiado a través de juego lúdico, juego matemático y uso de material didáctico para el desarrollo del pensamiento numérico de los niños y niñas de Grado Transición del Jardín Infantil Chiquilines de Pereira*”, aborda

asuntos relacionados con las distinciones entre juego guiado, juego lúdico, juego matemático y material didáctico. El primero enmarca unos objetivos por cumplir, el segundo desarrollar habilidades que ya tienen los niños, el tercero actúa como herramienta para enseñar matemáticas dando momentos de esparcimiento y el último como herramienta que permite despertar la curiosidad y creatividad de los niños.

La autora trata de mostrar cómo es posible desarrollar el pensamiento numérico haciendo uso de material didáctico, en el marco de una práctica educativa basada en un proyecto de aula titulado “Un paseo por el campo y la ciudad” en el cual, como su nombre lo indica, los niños de este jardín tuvieron la oportunidad de visitar estos lugares. La intención de la profesora fue potenciar el lenguaje, oral, escrito y comprensivo de los estudiantes y acercarlos al conocimiento científico.

La autora en este documento muestra el diseño e implementación de una guía práctica para profesores, “*Juegos Matemáticos con Material Didáctico*”. En esta guía, la autora presenta algunos materiales didácticos creados para desarrollar el pensamiento numérico en los niños de grado preescolar y de los cuales surgen algunos juegos que promueven este desarrollo. Los materiales propuestos son: “*Máquina de la suma*”, “*Pizza numérica*”, “*Bombón y dado*” y “*Casita de letras*”.

- Corredor y Gordillo (2020), en su trabajo de grado para optar al título de Licenciadas en Matemáticas titulado “*Partetouille y Fractionary: Juegos para la enseñanza de las fracciones*”, presentan una propuesta de un par de juegos dirigidos a niños de 8 a 12 años que contribuyen a la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en la educación primaria y en inicios de la educación secundaria.

La idea de las autoras fue diseñar juegos que involucraran los números fraccionarios a partir de su interpretación parte-todo. En el diseño de estos juegos, las autoras se basaron en referentes teóricos de los cuales generaron una lista de parámetros para la creación y el uso de los juegos para la enseñanza y el aprendizaje.

El primer juego multijugador de cartas, denominado *Partetouille*, consiste en que los jugadores obtengan los ingredientes de una lista que les correspondió a partir de las cartas de un mazo y de las que los contrincantes van descartando de su mano. Estas cartas están diseñadas de tal forma que se identifique una fracción en interpretación parte-todo (p. ej. Una cubeta de 6 huevos con 1 huevo en ella, fracción $1/6$). El pilotaje de este juego se llevó a cabo con ocho personas adultas (porque su desarrollo se dio en la cuarentena por COVID-19). Las autoras diseñaron también ciertos formatos que fueron respondidos por los jugadores para expresar sus opiniones y experiencias respecto al material.

En el segundo juego, denominado *Fractionary*, las autoras se basaron en el juego de dibujo *Pictionary*, modificaron sus reglas y ajustaron la idea original del juego de tal forma que su nueva finalidad fue que los jugadores pudiesen hacer transiciones entre los diferentes tipos de representación de los números fraccionarios. Las autoras presentaron esta propuesta a profesores en formación y en ejercicio, con el fin de recibir comentarios y observaciones respecto a la pertinencia del juego.

En general, las autoras obtuvieron comentarios positivos respecto a las dos propuestas de juegos. Específicamente, una de las apreciaciones por parte de los expertos para el juego *Fractionary* fue “*Invita a desarrollar en los estudiantes el concepto de fracción y sus distintas representaciones de una manera amena y divertida*” (Corredor y

Gordillo, 2020, p. 83). Reconocemos que ambos juegos son propuestas innovadoras y atractivas para los estudiantes, lo que puede incentivar el aprendizaje y la comprensión de las fracciones en sus diferentes representaciones e interpretaciones.

- Cifuentes y Pitre (2021), en su artículo titulado “*Desarrollo del pensamiento numérico mediante secuencia didáctica en modelo educativo escuela nueva para grado segundo*”, muestran el aprovechamiento de una secuencia didáctica que atiende al desarrollo del pensamiento numérico según el modelo Escuela Nueva³. Esta secuencia didáctica fue implementada con estudiantes de segundo grado de la Institución Educativa Municipal Guavio, en Fusagasugá, Colombia. La propuesta fue dividida en tres sesiones de clase, en las cuales los profesores buscaron el trabajo y el juego colaborativo, así como el uso de material didáctico de manera tal que permitiera en los estudiantes desarrollar procesos de conteo, numeración, comparación y cálculo mental, aspectos que potencializaron el desarrollo del Pensamiento Numérico de los estudiantes (Cifuentes y Pitre, 2021).

Los anteriores cinco documentos, nos permiten identificar las distinciones que se pueden encontrar en el uso de los materiales didácticos para el desarrollo del pensamiento numérico. Además, estos materiales pueden tener distintas finalidades dependiendo de los objetivos de uso que se tengan para las clases. Aparte de desarrollar una temática en el aula, permiten potenciar otras destrezas o habilidades en el arte, la comunicación y el trabajo colaborativo. Observamos que estos trabajos tienen propuestas de juegos y materiales que podrían adaptarse según la pedagogía Waldorf y, en consecuencia, son útiles para nuestro trabajo; algunos de ellos son: el círculo de multiplicación Waldorf, las regletas de María Antònia Canals y el uso de literatura

³ El modelo Escuela Nueva es definido por el MEN como : “Modelo escolarizado de educación formal, con respuestas al multigrado rural y a la heterogeneidad de edades y orígenes culturales de los alumnos de las escuelas urbano – rurales”

para la enseñanza de las matemáticas, en el caso del cuento de Pita y Samboní (2012); los juegos de Corredor y Gor

dillo (2020) también podrían ser utilizados para promover ambientes de aprendizaje en el marco de la pedagogía Waldorf. Realizamos esta afirmación puesto que, en el marco de la pedagogía Waldorf se pueden tomar diversos objetos, materiales o juegos para llevar al desarrollo de las clases siempre y cuando se cumpla con uno de los objetivos principales que es el desarrollo integral de los estudiantes.

Al hacer las revisiones de los anteriores documentos, podemos analizar la relación ya existente de las matemáticas y la pedagogía Waldorf, y a su vez, mostrar esta relación no solo con contenidos de primaria y secundaria, sino también llevar herramientas de la pedagogía Waldorf para que sean conocidas por futuros educadores matemáticos. Incluso, mediante algunos de los elementos constitutivos de la pedagogía Waldorf, nos planteamos profundizar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Algunos de estos elementos son: la antroposofía, al momento de brindar a los estudiantes la oportunidad de formar su ser y su espíritu, teniendo en cuenta su autonomía y voluntad por aprender; dar la importancia a la vivencia y lo experiencial en el aprendizaje de las matemáticas; incentivar a los estudiantes a buscar la veracidad en los procesos partiendo de su propio análisis; aprendizajes a partir de reflexiones y situaciones significativas, y que las tareas matemáticas y materiales a utilizar sean adaptables a las necesidades de los estudiantes, atendiendo a desarrollar procesos en ellos.

Capítulo II. Marco de referencia

A continuación, presentamos los elementos conceptuales que fundamentan nuestro trabajo de grado, la pedagogía Waldorf, su historia, ciclos educativos involucrados y elementos fundamentales. Presentamos también una explicación de lo que entendemos por pensamiento numérico y sistemas numéricos, las temáticas usualmente asociadas a este en Colombia, así como sus procesos más representativos; y los materiales didácticos, particularmente los referidos a la pedagogía Waldorf y el desarrollo del pensamiento numérico y sistemas numéricos. También presentamos en este capítulo información relativa a tareas matemáticas y su estructura, para efectos de nuestra propuesta.

Además, para complementar las ideas que presentamos en esta sección, utilizamos información recolectada en una entrevista informal realizada el día 30 de noviembre de 2022 a la egresada de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, profesora Sandra Morales. La profesora Sandra cuenta con conocimiento de la pedagogía Waldorf porque luego de sus estudios en el pregrado decidió formarse y enfocarse en esta pedagogía. Actualmente, la profesora Morales es maestra de la Fundación Inti Huasi Casa del Sol, en el barrio Nicolás de Federmann en Bogotá, D.C., Colombia. Ella, en la entrevista realizada, nos brindó información relevante sobre esta pedagogía, particularmente cómo se ven las matemáticas, cómo se organiza el currículo, los ciclos escolares y cómo ha sido su trayectoria y formación para trabajar en colegios Waldorf.

2.1 Pedagogía Waldorf

La pedagogía Waldorf es un modelo pedagógico fundado por Rudolf Steiner en el año 1919. Este filósofo, escritor y educador también fue creador de la antroposofía, ciencia que contempla al ser humano como un ser tripartito formado por cuerpo, alma y espíritu (Marcos,

2014). Steiner planteó como principios de la Pedagogía Waldorf, por un lado, comprender la naturaleza del ser humano a partir de sus desarrollos evolutivos divididos en septenios (etapas de 7 años cada uno), y, por otro lado, la importancia del papel del maestro como facilitador del proceso de desarrollo del individuo. Lo anterior visto desde tres aspectos que se constituyen en los supuestos que sustentan estos procesos en la formación de estudiantes Waldorf: el teórico, el filosófico y el metodológico (Cruz, 2015).

En la pedagogía Waldorf no se está pensando en la intelectualización del niño, sino que su foco es el desarrollo de procesos y la formación integral de los estudiantes⁴. Vale decir que la educación Waldorf es escasa en Colombia; solo existen en el país cuatro fundaciones en las que se implementa esta pedagogía (Morales, 2022).

2.1.1 Historia⁵

Rudolf Steiner nació en 1861 en Croacia; a la edad de 39 años participó en una sociedad centrada en el estudio espiritual del ser humano. Partiendo de esto, nació su enfoque por los desarrollos evolutivos del hombre y su naturaleza, siendo la base para la creación de la ciencia a la cual denominó antroposofía que, según Rawson (2017), significa conocimiento a través del ser humano. Esta ciencia postula la existencia de un mundo espiritual intelectualmente comprensible y accesible a la experiencia humana.

Con la culminación de la Primera Guerra Mundial, Steiner, en su preocupación por el bienestar de las personas y la sociedad en su entorno, vio la necesidad de proponer, desde su

⁴ Esta formación integral sobre los niños no era evidente para la profesora Sandra en colegios de enseñanza tradicional, donde en algunos de estos tuvo la oportunidad de ser jefe de área.

⁵ El nombre Waldorf es debido a que la primera escuela fundada con esta pedagogía fue creada para los hijos de los obreros de la fábrica de cigarrillos “Waldorf Astoria” en Stuttgart (1919). Steiner fue uno de los tres dueños fundadores con los esposos Berta y Emil Molt.

ciencia, nuevas ideas para la formación educativa de las personas. Con lo anterior, logró dar los primeros pasos de lo que más adelante se conocería como pedagogía Waldorf.

Carlgren (1989) menciona, en el libro *Pedagogía Waldorf. Una educación hacia la libertad* del Informe del movimiento Internacional de las Escuelas Waldorf, que el verdadero inicio de la pedagogía Waldorf se vio con el sueño de poder abrir una escuela con doce grados donde las familias de los obreros de la fábrica de cigarrillos “Waldorf - Astoria” tuvieran un lugar para aprender sin que importara su estatus social. Así, el 7 de septiembre de 1919 en Stuttgart, Alemania fue inaugurada la primera escuela enfocada en pedagogía Waldorf con alrededor de 300 estudiantes.

El nombre de la fábrica de cigarrillos “Waldorf - Astoria” lleva este nombre por el señor Johann Jakob Astor quién nació en 1763 en la ciudad Walldorf, ciudad que actualmente lleva por nombre Baden-Wurttemberg. Astor fue uno de los hombres más ricos de Alemania tras migrar a Estados Unidos de América. Dada la importancia de este hombre en su época, su nombre trascendió en la historia de modo que los fundadores de la fábrica la nombraron en su honor.

Esta pedagogía se basa en la idea que el ser humano no solo desarrolla su ser con la adquisición de nuevos conocimientos, sino que también evoluciona al mejorar sus capacidades mentales, intelectuales y morales. Lo anterior tiene el propósito de influenciar el desarrollo integral del ser humano desde aspectos como *lo sano y la armonía* incluyendo la parte física y emocional del individuo (Cruz, 2015).

2.1.2 Ciclos educativos y septenios

Según Carlgren (1989), en los inicios de la pedagogía Waldorf fueron separados los ciclos escolares gracias a los estudios de Rudolf Steiner sobre la evolución del ser humano. Esta idea de los ciclos educativos fue creada por Steiner, quien propuso que la mente, el cuerpo y el

espíritu de cada individuo va evolucionando en períodos de 7 años, ya que durante estas épocas los individuos suelen tener cambios importantes no solo físicos, sino también emocionales e intelectuales. Aunque actualmente estas etapas se conocen como *septenios*, en un principio no fueron denominados de esta forma. Para ese entonces se llamaron como a continuación exponemos:

- El primer septenio, conocido como *la edad preescolar*, corresponde a la edad en la que predomina la imitación en el niño.
- El segundo septenio, conocido como *los siete años* en el que nace en los niños el deseo de aprender a partir de una autoridad para seguir desarrollando el instinto de imitación.
- El tercer septenio, conocido como *la pubertad* en la que los adolescentes experimentan con lo que encuentran a su alrededor e intentan darle un sentido propio.

Los septenios, según Rudolf Steiner, son tales que se dividen así: el primero corresponde desde el nacimiento a los siete años, el segundo de los siete a los catorce años, el tercero de los catorce a los veintiún años y así siguiendo el patrón de periodos de siete años.

El proceso educativo en primaria y bachillerato de cada individuo se lleva a cabo durante los primeros tres septenios y aproximadamente dura hasta los dieciocho años, ya que es la edad en la que los estudiantes, por lo general, terminan su formación secundaria obligatoria. A continuación se presenta, a detalle, los septenios de interés para la elaboración de este trabajo, con el fin de establecer una relación entre el desarrollo del ser de cada individuo con la formación educativa llevada a cabo en los septenios correspondientes.

Primer septenio (del nacimiento a los 7 años). Este se puede dividir en dos partes; en la primera, para Abambari y Bermeo (2019), “el proceso de aprendizaje en el niño menor de siete años es voluntad (imitación) > sentimientos (al imitar) > pensamientos (preguntas)” (p.14). En

esta primera parte el niño aprende a caminar, a hablar, empieza a relacionarse con su entorno, además, empieza a desarrollar su lado espiritual y su carácter al enfrentarse a una situación.

La segunda parte de este septenio se da en compañía de un adulto cuya función es darle seguridad al niño en el momento que se relaciona en su entorno. Como mencionan Clouder y Rawson (2011, como se citó en Marcos, 2014), “en la primera infancia el juego es el trabajo más importante y a través de este los niños experimentan y comprenden la naturaleza del mundo y su entorno cultural” (p. 31). Con lo anterior, se hace necesario generar espacios donde los niños se puedan desarrollar libremente, que se les pueda ofrecer a ellos actividades que impliquen el desarrollo de su creatividad.

Las aulas en este septenio se ven permeadas por estudiantes de distintas edades para que aprendan a convivir mediante un espacio cálido, desarrollando actitudes de empatía, amabilidad y confianza con su entorno. Además, en este primer septenio lo principal es el juego, la música, la exploración y el autoconocimiento con el entorno.

Segundo septenio (de los 7 a los 14 años). “En esta edad, el niño se interesa más en su entorno, surgiendo un legítimo interés por experimentar a través de las diferentes materias y actividades. Así mismo, en estos años, aprende los hábitos que lo acompañarán en su vida adulta” (Home y Rincón, 2017). Además, en este septenio, el niño desarrolla su dimensión anímica.

Es en el segundo septenio en el que los niños inician la escuela en términos de la formalidad. La jornada escolar está estructurada siguiendo un ritmo que “oscila entre captar y vivenciar, y entre realizar y crear, lo que se puede considerar como un gran ritmo de aspiración y espiración” (Marcos, 2014, p. 34). En las escuelas Waldorf se reconoce que a medida que los niños desarrollan habilidades para procesos intelectuales, se les dan materias que exigen mayor

saber. La enseñanza en este tipo de escuelas se sigue por los llamados “periodos pedagógicos” en los cuales una asignatura es abordada durante tres o cuatro semanas, lo cual permite un mayor nivel de profundidad en estas.

En la fundación Inti Huasi (Bogotá, D.C., Colombia), los estudiantes tienen una clase principal a partir del grado primero, en la que fortalecen las asignaturas fundamentales como Números y Letras; estas aumentan a medida que el estudiante avanza de grado escolar. Estas materias fundamentales las estudian entre tres o cuatro semanas con profundidad y como apoyo a las clases existen las llamadas clases complementarias que son enfocadas en el desarrollo integral de los estudiantes. Las clases complementarias pueden variar entre modelado, pintura, crayola, cocina, jardinería, entre otras, según el grado escolar que estén cursando los estudiantes de este septenio. Existe también una alternancia de las clases principales. Por ejemplo, en un periodo pedagógico los estudiantes pueden ver Números como clase principal y el siguiente periodo pueden ver Letras. Conforme los estudiantes son promovidos al siguiente grado, la cantidad de clases principales empieza a aumentar, añadiendo asignaturas como Ciencias Naturales, Historia e Inglés. En la medida de lo posible todas las asignaturas son impartidas por el mismo maestro o tutor de cada curso. La intencionalidad en la pedagogía Waldorf es que el profesor que inicie con el grupo de niños lo acompañe durante todo su proceso escolar. De esta manera el maestro puede lograr un mayor acercamiento al desarrollo que los niños vayan teniendo, además de trabajar en un proceso continuo de enseñanza y aprendizaje con los estudiantes (Morales, 2022).

Además de lo anterior, es de resaltar que en las aulas no se utilizan libros o textos guía. La formación de los profesores debe ser tal que los conocimientos se puedan construir en comunidad, con la participación de los estudiantes. Estos conocimientos se desarrollan de una

forma artística. Incluso, durante las jornadas los estudiantes y en lo posible padres de familia elaboran sus propios “cuadernos pedagógicos” con la orientación del profesor; estos no tienen líneas ni cuadrículas, son completamente blancos con la finalidad de desarrollar sentido de orientación mediante la exploración, en los procesos de enseñanza elegidos por el tutor.

En este septenio se marca la diferencia con respecto a la forma de enseñar en la pedagogía Waldorf y en la enseñanza tradicional, ya que se pretende que las temáticas sean abordadas, en un principio, con historias y cuentos que ayuden a generar en los niños imágenes de los objetos de aprendizaje de diferente tipo. Posteriormente, existe una transición de una representación figural a construir una definición del objeto y darle un nombre propio. Como se ha mencionado anteriormente, el aprendizaje está articulado siempre con un sentido artístico y los profesores son los encargados de despertar el interés y entusiasmo de los niños. La formación de los estudiantes debe ser voluntaria y no obligatoria; por consiguiente, la voluntad de los estudiantes se moldea en libertad de sus propios derechos.

Tercer septenio (de los 14 a los 21). En esta última etapa se desarrollan a fondo los conceptos abstractos en relación con los contenidos correspondientes al año escolar que pertenezcan los estudiantes. En este periodo de tiempo cambia la concepción pedagógica; se da una educación a través del pensamiento, ya que se espera que los adolescentes estén listos para dar juicios y críticas a partir de sus conocimientos; por lo tanto, el aprendizaje está mayormente permeado por el razonamiento. Sin embargo, se mantiene la intención de desarrollar tareas que contribuyan a la autonomía y libertad de los estudiantes.⁶

Además, los estudiantes desarrollan la capacidad de afrontar situaciones problema de su contexto a partir de situaciones de enseñanza – aprendizaje (Abambari y Bermeo, 2019), teniendo en cuenta que los estudiantes en esta etapa están pasando por cambios actitudinales. Aunque esta pedagogía en sí misma está pensada para que el estudiante complete su formación escolar hasta los 21 años; en Colombia esto no es posible, debido a las políticas públicas colombianas en relación con la correspondencia de edades y los grados escolares (Morales, 2022).

2.1.3 Elementos fundamentales de la pedagogía Waldorf

De acuerdo con lo expuesto hasta ahora, algunos de los elementos que caracterizan a la pedagogía Waldorf, sintetizados por Moreno (2010), son:

- **La gran importancia de las artes en la escuela:** en esta pedagogía, se le concede a la música, los trabajos manuales y otras prácticas artísticas una gran importancia ya que el aprendizaje se lleva a cabo de una forma más amena y agradable para los estudiantes. Se tiene la creencia que el trabajo artístico que se realiza permite el

⁶En este septenio no podemos ejemplificar, en este momento, qué tipos de actividades existen ya que en lo indagado no se explicita, y en la entrevista se resalta que sólo en una de las cuatro fundaciones Waldorf brindan escolaridad para el tercer septenio y es distinta a la que pertenece la profesora entrevistada.

desarrollo intelectual en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Los cantos repetitivos con ritmos que implican movimientos corporales (euritmia), moldeo de figuras, entre otras tareas manuales y artísticas, generan un desarrollo equilibrado del ser integral de los estudiantes.

- **Evaluación no competitiva:** este elemento hace alusión a que en la pedagogía Waldorf no existen las calificaciones, lo cual implica que el trabajo realizado por los estudiantes es por mera voluntad, aspecto que es un principio de esta pedagogía. Aunque no hay calificaciones, sí se realiza evaluación de los estudiantes, esta “describe el desarrollo de las facultades del niño/a de forma global” (Moreno, 2010, pág. 206).
- **Los libros de texto guía no se utilizan:** en su lugar, cada maestro Waldorf toma las decisiones pertinentes de cómo abordar los contenidos (elementos a utilizar en clase, estrategias de lectura y material didáctico) con la finalidad de tener una secuencia y vínculo en cuanto al uso de las herramientas en las temáticas siguientes sin importar la asignatura o contenido específico. Además, en esta pedagogía los estudiantes elaboran, con ayuda de sus padres, los cuadernos en los que ellos escriben y dibujan para tener una mayor conexión con su proceso de aprendizaje y sentido de pertenencia.
- **Naturaleza y educación:** en la pedagogía Waldorf se da importancia a la naturaleza al momento de educar, pues en este enfoque, el estudiante aprende reconociendo su entorno. Es así como en esta pedagogía se prepondera desarrollar amor, comprensión y cuidado por la naturaleza. Los materiales con los que los estudiantes trabajan (para construir, para jugar) deben provenir de la naturaleza; es por esto que se procura no utilizar plástico. De esta forma, al usar materiales reciclables o biodegradables se

prima el cuidado y respeto a la naturaleza; aspecto fundamental en el desarrollo de valores de los estudiantes, ya que de esa manera tienen mayor sentido de pertenencia y cuidado de su entorno.

2.2 Matemáticas y pedagogía Waldorf

En este apartado presentamos de qué manera se vinculan las matemáticas y la pedagogía Waldorf. Tomamos como referentes, autores como Marques y Pontin (2021) y De Figueiredo (2016), quienes en sus trabajos abordan cómo se ve la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el contexto de la pedagogía Waldorf por medio de investigaciones o entrevistas. También nos apoyamos en la entrevista realizada en 2022 a la profesora Sandra Morales, mencionada anteriormente.

En la pedagogía Waldorf se busca formar a los estudiantes para enfrentarse al mundo y más que enseñar unos contenidos, se propugna que las asignaturas abordadas, en nuestro caso las matemáticas, sean trabajadas de forma viva, reflexiva, dinámica y significativa (Marques y Pontin, 2021).

Según Richter (1995, como se citó en Marques y Pontin, 2009), la enseñanza de las matemáticas en la pedagogía Waldorf se divide en tres fases, la primera fase refiere a los *procedimientos esenciales* que están relacionados con la actividad usual de los niños hasta los primeros cinco años de escolaridad; esta actividad ronda en torno al juego libre, cuidado del entorno, respeto, reconocimiento del otro como persona. La siguiente fase, de tres años, se enfoca en un *aspecto más práctico* como lo es aprender letras, números, juegos guiados, aprendizaje de rondas y cantos; en la última fase, desde el noveno año, se incorpora el *punto de vista racionalista*, en la que los estudiantes aprenden de forma consciente.

De lo anterior, podemos mencionar que lo que marca la diferencia de la enseñanza en la pedagogía Waldorf con respecto a la enseñanza tradicional es la metodología, al abordar los objetos de conocimiento. En las escuelas o fundaciones Waldorf existe una organización de los contenidos (un currículo de matemáticas, del cual hablaremos en el siguiente apartado); sin embargo, la forma como estos se enseñan cambia significativamente. Como menciona Morales (2022), en la pedagogía Waldorf la enseñanza de las matemáticas se enfoca en desarrollar procesos en los estudiantes y no existe prisa por completar algún tema antes de terminar cierto año escolar. Se pretende que los niños sean quienes construyan el conocimiento y doten de un significado propio a los objetos matemáticos luego de una previa manipulación e interacción con estos; mientras tanto el maestro Waldorf hace las veces de mediador y guía a los estudiantes en este proceso.

2.2.1 El currículo de Matemáticas en la pedagogía Waldorf

En esta sección hablamos sobre cómo se organiza el currículo de matemáticas en esta pedagogía, gracias al trabajo investigativo de De Figueiredo (2016), de quien hemos extraído las fases que expone en su documento, en las cuales se ordenan cada uno de los grados de la educación contemplados en el currículo Waldorf. Cabe resaltar que el currículo no es el mismo en todas las escuelas o fundaciones Waldorf. Sin embargo, pretendemos dar al lector una idea de la sistematización de los contenidos y, en especial, de qué manera dichas temáticas son abordadas en estas escuelas.

La intensidad horaria para la enseñanza de las ciencias, específicamente hablando de las matemáticas (las matemáticas se incluyen en las ciencias), se desarrolla en épocas del año escolar, cuya duración varía entre tres o cuatro semanas. Estas clases se toman durante la primera franja horaria que oscila entre dos o dos horas y media y son llamadas la clase principal. Seguido

de esto, estas clases se complementan con materias del área de artes y otras asignaturas que se abordan en la pedagogía Waldorf como cocina, bisutería, tejido, moldeado de figuras y jardinería.

Primera fase (Primer a tercer grado). En la pedagogía Waldorf, la educación primaria empieza casi al finalizar el primer septenio (aproximadamente a los seis o siete años) y la enseñanza de las matemáticas en los primeros años escolares de este ciclo. Particularmente de primer a tercer grado se lleva a cabo con procesos rítmicos acompañados de movimientos corporales, cuentos, rimas e historias que fortalecen los imaginarios de los estudiantes y se utilizan materiales tangibles como sólidos geométricos y materiales didácticos, por lo general artesanales, diseñados o adaptados para la enseñanza de un tema en particular de las matemáticas.

En los primeros tres años escolares, la enseñanza tiene un carácter configurativo (De Figueiredo, 2016). Esto quiere decir que los estudiantes aprenden a través de la manipulación directa de los objetos. En estos años se pretende que el profesor suministre a sus estudiantes la mayor cantidad de representaciones posibles, con las cuales los niños realizan un proceso de registro figural y de esta forma logran un primer acercamiento al objeto en cuestión.

El primer objeto matemático trabajado es el número. Se exploran características cualitativas, cuantitativas y rítmicas mediante el reconocimiento y estudio de la presencia arquetípica de los números en el mundo. Se estudia la ordenación y secuenciación de los números a través de experiencias sensoriales propuestas y organizadas por el maestro acompañante.

En el segundo año se abordan temas como las magnitudes de tiempo: horas del día, estaciones del año, el año solar; estos temas se abordan mediante poemas, rimas y canciones con ritmos. En simultáneo, se continúa el estudio de los números y su secuenciación con cantos y

movimientos corporales. Posteriormente, se empiezan a trabajar *operaciones básicas* y se hace un trabajo profundo en la multiplicación a partir del conteo secuenciado.

En el tercer año los niños llegan alrededor de los nueve años. En esta edad, los niños se enfrentan a una etapa de crisis denominada *rubicón*, en la cual experimentan sentimientos de soledad, duda, inadecuación y angustias que pueden afectar a cada niño en mayor o menor medida. Todo esto hace parte en su proceso de crecimiento y madurez. Sin embargo, se desarrollan actividades en las que prepondere el trabajo en equipo, de forma tal que los niños se sientan cómodos con la presencia del otro (De Figueiredo, 2016).

Segunda fase (cuarto a quinto grado). Los niños llegan a estos dos grados escolares entre los diez y once años de edad. En esta fase la enseñanza y el aprendizaje empieza a adquirir un carácter descriptivo. Esto, porque los niños empiezan a tener capacidad de describir las cosas que observan y hacen. Los niños dejan de necesitar la presencia del objeto mismo y empiezan a trabajar con modelos o imágenes mentales que ellos crean; sin embargo, el profesor no deja de presentar imágenes para introducir nuevos objetos.

En el cuarto año se abordan las fracciones, y una de las formas en las que pueden ser introducidas es mediante el dibujo de formas en el que el niño realiza adicionalmente procesos geométricos y de espacio para reproducir a mano alzada las imágenes presentadas por el profesor.

En el siguiente año, el quinto grado, los estudiantes han ampliado sus capacidades de abstracción, reflexión y pueden ser capaces de efectuar operaciones mentales con un nivel mayor de precisión. En esta etapa de la vida, los niños siguen con la emoción y curiosidad por conocer sobre el mundo de los números. De esta forma el tema a trabajar son los sistemas numéricos utilizados en civilizaciones antiguas y la creación de sistemas de pesos y unidades de medidas.

Tercera fase (de sexto a octavo grado). En esta tercera fase se evidencian en los estudiantes capacidades como la de relacionar y comparar significados, concluir y poner en juicio situaciones del mundo que lo rodea y en matemáticas es reflejado en la capacidad demostrativa. Poniendo en juicio afirmaciones y de esta forma se incentiva a los estudiantes en la producción de argumentos y en hacer propios los procesos de razonamiento y de ejercitación de la deducción.

En el sexto año escolar, “las matemáticas tienen un importante papel socializador y ennoblecedor para los valores humanos” (De Figueiredo, 2016, p. 55). En este punto el profesor puede aprovechar que los estudiantes aún no están en un punto de su desarrollo en el cual conocen el egoísmo y así enseñarles los valores del dinero respecto a valores de compraventa, préstamo y donación. En consecuencia, uno de los temas importantes a introducir en este año escolar son los estudios relacionados con las matemáticas financieras en las que se abarquen los temas de razón, proporción y porcentajes que permitan el paso a la introducción del álgebra con cálculos de intereses, por ejemplo.

Durante el séptimo y octavo grado escolar, los estudiantes están entre los trece y catorce años. Los estudiantes tienden a ser inquietos y querer “saber más”, en la formación Waldorf para grado séptimo se abordan ecuaciones de primer grado y el aprendizaje de estas con las relaciones de la vida práctica de los estudiantes. El estudio de las ecuaciones se da a partir de un relato tipo problema, donde los estudiantes identifican todas sus partes descomponiendo el todo, aplican sus saberes previos y dan solución. Esa descomposición de las situaciones problema los lleva a una comprensión real del tema. También se hace uso de imágenes y ejemplos para proceder a las actividades a desarrollar.

Para el grado octavo, los estudiantes están terminando aproximadamente el segundo septenio. Las actitudes de los estudiantes cambian desde los doce años paulatinamente. Durante este año se tiene en cuenta el conocimiento anterior adquirido para ver monomios y polinomios como temáticas principales, llevando sus conocimientos a niveles imaginativos más abstractos (De Figueiredo, 2016).

Cuarta fase (de octavo a duodécimo grado). Cuando los estudiantes entran al tercer septenio y hasta los 18 años aproximadamente, ocurren cambios amplios en ámbitos personales y académicos; por ejemplo, muestran mayor seguridad ante los procedimientos y afirmaciones que realizan. En este momento los maestros también deben cambiar frente a los estudiantes. Los cambios de los maestros van en relación con su quehacer, puesto que van a ser guías para que al percibir el mundo y su entorno se puedan reconocer ellos mismos.

Para grado noveno los estudiantes ya son adolescentes y sus requerimientos emocionales y personales van hacia la seguridad. La seguridad que ellos sienten se debe guiar, pero sin dar la solución a dudas académicas. En este grado, los temas se desarrollan en construcción con los estudiantes, es decir descubren y promueven los temas, formulando postulados y llegando a la veracidad de estos sin necesidad que el profesor dé por completo las temáticas. En este grado se ven temas como las identidades algebraicas y geometría con mayor profundidad, en el caso de la geometría es donde evidencian en su mayoría la construcción de definiciones con ayuda de los estudiantes.

En décimo grado los estudiantes están alrededor de los dieciséis años y sus cambios físicos están en su punto crítico. Esto quiere decir que los adolescentes entran a analizar mucho sus cuerpos, a mirarse, se cuestionan por su imagen y pueden tener cambios de ánimo constantes en relación con su forma de verse. Los adolescentes suelen cuestionar también los retos a los que

se enfrentan y dudan de sus propias posibilidades, inclusive en el desempeño dentro de las clases de matemáticas. En este grado escolar se trabajan en su mayoría el análisis de fórmulas, funciones y uno de los temas centrales son las ecuaciones de segundo grado. También se estudia el teorema de Pitágoras y trigonometría a partir del dibujo de mapas a escala y relaciones topográficas. En esta edad los adolescentes sienten la necesidad de comprobar y analizar la utilidad de cada nuevo aprendizaje; por eso es muy importante continuar con las relaciones que se dan mediante los ejemplos de la vida real.

En undécimo grado se dan nuevos modelos explicativos dentro de las matemáticas como la geometría analítica y los logaritmos. En este punto los adolescentes están enfocados en su vida y en descubrir cuál es su misión para cumplir en el plano terrenal. Tienen una visión más amplia sobre las matemáticas y suelen cuestionarse con mayor facilidad en cuanto a la veracidad de las propiedades de objetos matemáticos a partir de la visualización y análisis.

Para el duodécimo grado⁷ los estudiantes ya están en los dieciocho años aproximadamente y poseen una amplia visión del mundo que los rodea. Podrán cuestionar los problemas que los rodean y tener distintos puntos de vista para analizar y afrontar las situaciones que se les presenten. Los jóvenes son más abiertos a escuchar las opiniones y puntos de vista. Dentro de los contenidos matemáticos para este grado se hace una recopilación de los saberes desde noveno grado para abordar las funciones y dar el paso a la derivación e integración en cálculo. Los jóvenes podrán tener mayor interés por el manejo de sus finanzas en sus futuros proyectos, por ende una temática a desarrollar con esta realidad es el interés compuesto y finanzas.

⁷ Cabe resaltar que en Colombia, de acuerdo con los niveles de la educación formal correspondientes a la estructura del sistema educativo, no es posible que las instituciones educativas tengan un duodécimo grado. Sin embargo a nivel internacional existen instituciones educativas que sí contemplan este grado escolar.

2.3 Pensamiento numérico y sistemas numéricos

El pensamiento numérico y sistemas numéricos es uno de los cinco tipos de conocimiento matemático a atender en el currículo escolar colombiano en la enseñanza de las matemáticas de la educación básica y media, de acuerdo con lo que se encuentra establecido en los referentes curriculares del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998); Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006); y Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas (2016)).

En los Lineamientos Curriculares en Matemáticas se presenta una concepción sobre el pensamiento numérico en la que McIntosh (1992, como se citó en Ministerio de Educación Nacional, 1998) se refiere a “la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones” (p. 26). En este sentido podemos ir identificando que el significado de los números y la comprensión de las operaciones que se realizan con ellos cobran relevancia en el desarrollo del pensamiento sobre el cual trata este apartado.

Así mismo, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) (en español, Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas) resalta la importancia de una formación académica que apunte a desarrollar habilidades en los estudiantes para la *comprensión del significado de los números*, para la *comprensión del significado de las operaciones entre números y sus relaciones*, y para *calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables*. De esta manera pretendemos dar relevancia a la construcción de significado por parte de los estudiantes para potenciar en ellos un sentido intuitivo sobre los números, sobre sus usos, relaciones e interpretaciones.

Siguiendo las ideas del NCTM (2000), queremos ahondar en cada uno de los tres aspectos que debe tener una persona para desarrollar pensamiento numérico. Es por esto por lo que presentamos, a continuación, a qué hace referencia cada uno de estos aspectos y algunos de los estándares básicos de competencias en matemáticas que presenta el Ministerio de Educación Nacional en sus documentos curriculares, pretendiendo particularizar dichas ideas del NCTM en el contexto colombiano.

2.3.1 Comprensión de los números, sus representaciones y sus relaciones

Los estudiantes desde el *prekindergarten* desarrollan la comprensión de los números a partir del conteo y de aprender a reconocer en una colección de objetos “cuántos hay”. En esta comprensión los estudiantes también identifican las formas de representación de los números; por ejemplo, mediante la descomposición de estos en otros números: pensar a 21 como 2 dieces y 1 uno. De la misma forma, en los primeros niveles escolares los niños aprenden sobre los tipos de números: números pares o impares; números primos; números cuadrados; etc. (NCTM, 2000).

En los siguientes niveles escolares es posible orientar a los estudiantes a reconocer las fracciones en contextos que les sean familiares. Es importante entender las fracciones como divisiones de números y posteriormente como un inicio al estudio de la proporcionalidad. En los NCTM (2000) se menciona que “la representación de números con diversos materiales físicos debería constituir una parte principal de la instrucción matemática en los niveles elementales” (p. 35). Los estudiantes pueden estar en facultad de identificar que 0.5, 50% y $\frac{1}{2}$ son distintas representaciones del mismo número. Esto anterior se dará conforme el estudiante pueda interactuar con estas representaciones de fracciones y números decimales, en la medida de lo posible con materiales físicos, lo cual permitirá mayor comprensión y habilidad para razonar y moverse entre distintas representaciones del número y elegir la más adecuada dependiendo del

contexto. Particularmente, en NCTM (2000) se expone una serie de ítems que hacen parte de las expectativas sobre lo que los estudiantes deberían poder hacer en cada ciclo escolar. En el Anexo A “*Estándares colombianos relacionados con la comprensión del significado de los números, sus representaciones y las relaciones entre ellos*” presentamos los estándares colombianos referidos al pensamiento numérico de cada etapa escolar que más se relacionan con los estándares establecidos en NCTM (2000).

2.3.2 Comprensión del significado de las operaciones y sus relaciones

En la escuela es importante desarrollar también la comprensión del significado de las operaciones matemáticas básicas de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación. Se resalta en NCTM (2000) y en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) la importancia de observar y explorar las estrategias de pensamiento que se pueden desarrollar en las aulas ya que estas permiten dar un mayor significado a los números y a las operaciones en contextos determinados.

A partir del cuarto grado la enseñanza se empieza a centrar en la comprensión de los significados de algunas operaciones entre números naturales, apoyándose con la creación o el uso de representaciones de situaciones de multiplicar o dividir; lo cual puede ayudar a los estudiantes a dar sentido a las relaciones entre estas operaciones. Particularmente, en los Lineamientos Curriculares (1998) se presentan algunos aspectos básicos que se pueden tener en cuenta para construir el significado de las diferentes operaciones matemáticas básicas; estos hacen referencia a:

- Reconocer el significado de la operación en situaciones concretas, de las cuales emergen.
- Reconocer los modelos más usuales y prácticos de las operaciones.

- Comprender las propiedades matemáticas de las operaciones.
- Comprender el efecto de cada operación y las relaciones entre operaciones.

Cuando los estudiantes **aprenden** las operaciones es necesario que identifiquen el efecto de estas en diferentes contextos numéricos y clasificar aquellas que tienen rasgos comunes, que luego permitan relacionarse y enmarcarlas en un mismo concepto de operación. En el Anexo B presentamos una compilación de estándares colombianos que permiten describir en cada ciclo escolar lo relativo a lo que se espera deberían saber los estudiantes en cuanto a la comprensión del significado de las operaciones.

2.3.3 Hacer cálculos con fluidez y hacer estimaciones razonables

Existe una competencia matemática relacionada con el cálculo numérico que se debe desarrollar en los estudiantes durante su formación académica. Los métodos de cálculo que se practican repetidamente pero no son comprendidos pueden ser fácilmente olvidados; pero comprender los cálculos sin tener habilidad para efectuarlos puede traer dificultades para el proceso de formulación y resolución de problemas (NCTM, 2000).

Particularmente, es necesario que la enseñanza de las matemáticas esté centrada en que los estudiantes puedan generar estrategias de cálculo que, además de ser útiles e interesantes para resolver problemas, desarrollen con ellas flexibilidad, fluidez y habilidad. A medida que los estudiantes avanzan en otras competencias, deberían ir desarrollando métodos de cálculo numérico para disminuir los errores comunes que pueden darse con las operaciones matemáticas básicas y así determinar si un cálculo se realizó correctamente o si fue lo bastante próximo.

Según el NCTM (2000) “Parte de la capacidad de calcular con fluidez radica en decidir inteligentemente qué herramientas usar y cuándo usarlas” (p. 38). Lo anterior, implica la necesidad que los estudiantes tienen de aprender a elegir cuándo se requiere un cálculo mental,

calcular a lápiz y papel, hacer una estimación o utilizar la calculadora. Es por esto por lo que se requiere brindarles a los estudiantes experiencias o situaciones que les permitan identificar la pertinencia de estos métodos según el contexto y así tomar la decisión más adecuada. Por ejemplo, los estudiantes deben considerar el contexto de los problemas para determinar si es necesario obtener un resultado exacto o estimado.

Como en los anteriores subtítulos, en el Anexo C presentamos los estándares del pensamiento numérico relacionados con realizar cálculos con fluidez y hacer estimaciones razonables. Es importante para nosotros mencionar que en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas no se presentan estándares para los ciclos de octavo a noveno y décimo a undécimo relacionados con la fluidez en los cálculos.

Se espera que la enseñanza de las matemáticas sea funcional tal que predomine el uso de conceptos en situaciones problema, y no solo el uso de algoritmos descontextualizados. Sin embargo, es necesario que se consideren diferentes contextos: de la vida cotidiana, de las matemáticas mismas y de otras ciencias. Con ellos es posible dotar de significado y comprensión los procesos relativos al pensamiento numérico. Por otra parte, uno de los objetivos en la formación en matemáticas es desarrollar el pensamiento numérico mediante el estudio de los sistemas numéricos de los números naturales, los números enteros, los números racionales y los números reales (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Para dar cierre a este apartado es importante resaltar que el pensamiento numérico puede ser potenciado en la pedagogía Waldorf a partir de la construcción de significados por parte de los estudiantes, mediante una metodología de enseñanza vivencial en la que se desarrollen cada uno de los tres aspectos fundamentales, con los cuales podremos decir que una persona tiene pensamiento numérico. Adicionalmente, mencionamos que la presentación de los anteriores

estándares nos sirve como elemento organizador para lo que pretendemos realizar y presentar en el marco metodológico de este trabajo de grado.

2.4 Materiales didácticos

Para nosotros y para la pedagogía Waldorf es importante que el proceso de aprendizaje de los estudiantes sea lo más agradable posible, posibilitando el aprendizaje a partir de experiencias vivenciales, por gusto y voluntad propia. Consideramos que existen elementos que cobran un papel importante en la enseñanza de las matemáticas que pueden favorecer la relación entre los estudiantes, el saber y el uso de materiales didácticos. La presencia de estos artefactos en la escuela permite acercar a los estudiantes al conocimiento matemático por medio de la manipulación de objetos y formas, o a través de actividades con movimientos corporales e interacción con el entorno. Lo anterior es una manera de darle protagonismo al estudiante en su proceso de formación.

En el terreno conceptual, tomamos como referente a Angarita y Palacios (2015), Rodríguez (2018), y a Torres y Casallas (2021), quienes presentan nociones sobre lo que versa este apartado, los tipos de materiales y además establecen sus funcionalidades y su relación a partir de cómo utilizarlos en clase.

Los materiales didácticos, según Torres y Casallas (2018), son “cualquier objeto manipulativo que puede mediar para la comprensión de un saber” (p. 208). Para ellas, los materiales didácticos se clasifican en dos tipos: materiales didácticos estructurados y no estructurados. Los primeros hacen referencia a los materiales que son diseñados para el aprendizaje y los segundos se refieren a objetos manipulativos que no fueron pensados para enseñar-aprender. Sin embargo, pueden ser de utilidad para los procesos de aprendizaje.

Los materiales pueden ser usados como dispositivos para manipular, modelar y representar, ya que durante la práctica los estudiantes se estimulan al interactuar por medio de los sentidos. Rodríguez (2018) afirma que “el hecho de manipular y utilizar materiales contribuye para que el aprendizaje sea significativo, al tiempo que se puede utilizar como herramienta para fortalecer el desarrollo del pensamiento numérico” (p. 69). Manejar, tocar y explorar objetos del interés de los estudiantes es fundamental para su aprendizaje, de esta manera pueden maximizar sus capacidades en un ambiente estructurado con finalidades específicas como lo puede ser el desarrollo del pensamiento numérico.

Por su parte, Angarita y Palacios (2015) resaltan de Flores et al. (2011) una tipificación de materiales didácticos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Particularmente, uno de estos criterios para clasificar dichos materiales es su utilidad. De esta última se derivan tres tipos asociados a los momentos de una clase en los cuales se pueden utilizar materiales didácticos:





- **Pre – instruccional:** este tipo de material se utiliza al momento de introducir un concepto. Con el uso de este se resalta la pertinencia de utilizar objetos que permitan la exploración de los estudiantes y un primer acercamiento al objeto a enseñar.
- **Co – instruccional:** es el tipo de material utilizado durante la enseñanza de un concepto. El material favorece la enseñanza, pues sirve como apoyo en este proceso.
- **Post – instruccional:** como su nombre lo indica, este material se usa posterior a la instrucción o a la enseñanza con el fin de fortalecer el aprendizaje del concepto enseñado.

Basados en lo anterior y en otras consultas, queremos presentar al lector la tabla 1, en la cual realizamos un listado de diferentes materiales didácticos propios de la pedagogía Waldorf

enfocados en la enseñanza de las matemáticas, clasificándolos según el tipo de material siguiendo los aspectos presentados en los párrafos anteriores.

Tabla 1.

Materiales propios de la pedagogía Waldorf para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Nombre del material	Tipo de material	Imagen del material
Círculo de multiplicación Waldorf	Estructurado Pre – Co – Post instruccional	
Gnomos Waldorf	Estructurado Co – Instruccional	
Arcoíris Waldorf	No estructurado Co – Instruccional	
Mandala Waldorf	No estructurado Co – Instruccional	

Para concluir, consideramos necesaria la inclusión de materiales didácticos en la enseñanza de las matemáticas de tal forma que se integren para potenciar el aprendizaje y así incentivar al estudiante y hacerle caer en cuenta de que hay maneras atractivas y divertidas para aprender matemáticas. Así mismo, reconocemos que el éxito de una clase, y particularmente de la enseñanza-aprendizaje, no solo depende del uso de estos elementos, sino que también cobra sentido la planeación de dicha clase y una intención clara, enfocada en el desarrollo de procesos

en los estudiantes. Como mencionan Torres y Casallas (2021) “el uso de estos dispositivos de manera intencionada hace posible desarrollar habilidades y procesos que van más allá de solo la comprensión de algoritmos y estrategias” (p. 214).

2.5 Tareas matemáticas

A la luz de los planteamientos de Gómez et al. (2018), las tareas matemáticas son acciones instructivas referidas a un contenido matemático en la que su ejecución o desarrollo depende de los estudiantes, quienes harán uso de saberes previos y nuevos para representar un quehacer matemático “y superen las limitaciones que el profesor ha conjeturado que ellos tendrán” (Gómez et al., 2018, p. 198). La asignación de tareas debe tener una finalidad: la construcción de conocimiento, el refuerzo de un saber o un fin evaluativo de los estudiantes.

Las tareas matemáticas ayudan al crecimiento cognitivo y personal de los estudiantes, ya que, en primer lugar, involucran nuevos retos que pueden permitir la construcción de conocimiento y generar estrategias para solucionar problemas; en segundo lugar, estas deben permitir en los estudiantes desarrollar valores como la autonomía y la responsabilidad; también habilidades como la creatividad y el pensamiento crítico.

Las tareas matemáticas para desarrollar pensamiento numérico y enseñar sistemas numéricos deben atender a las necesidades de los estudiantes respecto a los propósitos y contenidos propios de este pensamiento. Lo ideal es posibilitar en los estudiantes la construcción de conocimiento sobre la comprensión de los significados de número, sobre el significado de las operaciones y generar habilidades en el cálculo numérico y la estimación mediante las tareas matemáticas. Estas tareas permiten también que ellos descubran propiedades de números a través de procesos como representación, modelación, visualización, matematización y la resolución de

problemas que les permitan a los estudiantes acrecentar sus redes cognitivas y su pensamiento matemático.

2.5.1 Componentes de las tareas matemáticas

Consideramos importante hacer explícitas las partes de las cuales se compone una tarea. En primera instancia tomamos como referente a Gómez et al. (2018), quien expone que existen siete elementos claves para describir una tarea matemática, estos son: requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad. Estos elementos son presentados en la siguiente figura:

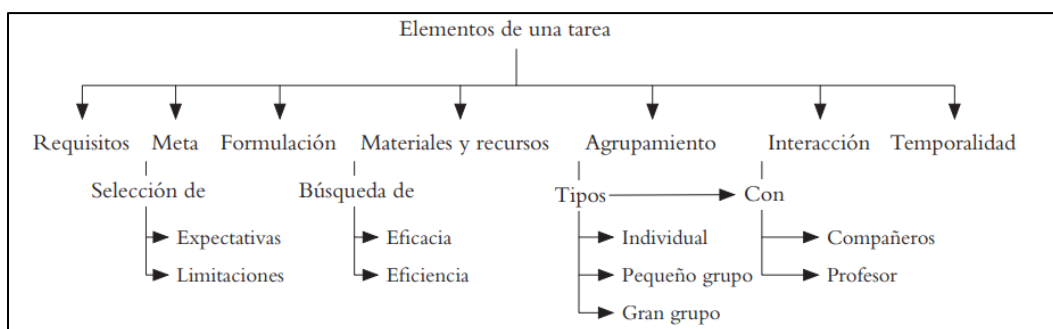


Figura 1. Elementos para describir una tarea matemática (Gómez et al., 2018, p. 212).

Gómez et al. (2018) recomienda que, durante la planeación de clase y el diseño de las tareas matemáticas, el profesor tenga en cuenta los elementos expuestos en la *Figura 1*, de tal forma que esta tenga una elaboración más exhaustiva y pueda ser implementada con mayor preparación y permitir el éxito en los aprendizajes de los estudiantes. Sin embargo, para efectos de nuestras necesidades al presentar las tareas diseñadas en el marco metodológico, vamos a considerar los primeros cuatro elementos para la elaboración de la estructura de nuestras tareas. A continuación, describimos brevemente los primeros tres ya que el elemento relativo a *materiales y recursos* se describió previamente en la sección anterior:

- **Requisitos:** se refiere al conjunto de conocimientos, destrezas y habilidades que los estudiantes tienen, según su nivel educativo, para el abordaje de la tarea. Estos conocimientos y destrezas se vinculan con el contenido matemático a desarrollar y como consecuencia permiten definir las limitaciones o expectativas sobre los niños al realizar la tarea.
- **Meta:** este elemento describe las intenciones del profesor con los estudiantes al asignar la tarea, es decir, se definen cuáles son los conocimientos, procesos o habilidades que el maestro quiere desarrollar en los estudiantes. Además, se consideran los errores y dificultades que se espera que la tarea ayude a superar. Las metas se formulan con frases concisas y permiten delimitar el centro de atención de la tarea respecto a los aprendizajes de los estudiantes.
- **Formulación:** se refiere al “texto o instrucción que el profesor proporciona a los estudiantes y que incluye la información de partida y especifica lo que espera que ellos realicen y produzcan como respuesta” (Gómez et al., 2018, p. 213). Dentro de la formulación de la tarea se describe un contexto o situación, se proporciona información de partida y se necesita que los estudiantes brinden una información final como solución.

En resumen, con los referentes presentados en este capítulo tenemos un amplio panorama de información en el cual enmarcamos el trabajo que abordamos en los siguientes capítulos.

Capítulo III. Marco metodológico

En este capítulo presentamos y describimos las fases en las que desarrollamos nuestra propuesta de tareas. Además, explicitamos los parámetros contemplados para el diseño y elaboración de cada tarea y los materiales didácticos utilizados para su implementación. Se tiene en cuenta el contexto de la pedagogía Waldorf, la estructura de tareas matemáticas y los elementos relativos al desarrollo del *pensamiento numérico* y *sistemas numéricos* que guían nuestro propósito en el diseño, elaboración y propuesta de dichas tareas y que se presentaron en el capítulo anterior.

3.1 Fase diseño

A continuación, exponemos las etapas correspondientes a la elección, diseño y adaptación de los principales materiales didácticos de la pedagogía Waldorf enfocados hacia la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Nos enfocamos en el pensamiento numérico y los sistemas numéricos.

Eta**pa 1. Determinación de parámetros para la creación de las tareas:** para la creación de las tareas tuvimos en cuenta los elementos que se mencionan en el capítulo precedente, tales como: los requisitos, la meta y la formulación de la tarea. También contemplamos la revisión de los asuntos matemáticos de los contenidos y procesos del pensamiento numérico y sistemas numéricos asociados a la pedagogía Waldorf, grado escolar y septenio al que va dirigida la tarea y el estándar básico de competencias matemáticas, de acuerdo con el MEN (2006), al que alude. De la misma forma tuvimos en cuenta presentar algunas ideas generales para inspirar y motivar a profesores a diseñar otras tareas, haciendo uso del material didáctico respectivo.

Etapa 2. Diseño del formato: se decidió elaborar una tabla (ver Tabla 2) para consignar y presentar la estructura general de las tareas de acuerdo con los parámetros expuestos.

Tabla 2

Esquema organizador de aspectos contemplados para las tareas

Título			
Material			
Requisitos			
Objetivo o meta			
Aspectos de la pedagogía Waldorf con los que la tarea se relaciona		Estándar(es) básico(s) de competencias matemáticas	
		Aspecto del pensamiento numérico	
		Contenido(s) del pensamiento numérico asociado(s) a la tarea	
Utilidad		Posible grado escolar	
		Septenio	
Asuntos matemáticos relacionados al tema del pensamiento numérico y sistemas numéricos			
Proceso a desarrollar atendiendo a la pedagogía Waldorf			
Secuencia de enseñanza (formulación)			
Otras ideas para inspirar a profesores			
Anexo			

Etapa 3. Selección del material Waldorf: los materiales seleccionados fueron los expuestos en la Tabla 1, en el apartado 2.4: el círculo de multiplicación Waldorf, los gnomos Waldorf, el arcoíris Waldorf y la mandala Waldorf ya que, como lo hemos indicado anteriormente, son los principales materiales que encontramos en el marco de la pedagogía Waldorf para la enseñanza de las matemáticas. Además, es importante mencionar que, por su sencilla construcción con recursos de bajo costo, se convierten en elementos de fácil acceso para estudiantes y profesores.

Etapa 4. Indagación de posibles usos del material e ideas de tareas en la red: en esta parte del proceso de diseño exploramos en la web algunos usos de los materiales didácticos seleccionados. Los resultados encontrados relacionados con documentos académicos fueron pocos. Sin embargo, se encontró información relativa a ciertos usos de los gnomos Waldorf y algunos trabajos en torno a la utilidad del círculo Waldorf en ciertos blogs, como es el caso de “*El arte de enseñar matemáticas: la historia de los amigos matemáticos*” (Aguamarina, 2018). Con los otros materiales fue necesario realizar una exploración de ellos, de forma física y proceder a pensar creativamente entre Lyda Mora, Luz Romero y Daniel Niño sobre cuáles contenidos del pensamiento numérico y los sistemas numéricos podrían ser abordados para finalmente diseñar las tareas.

Etapa 5. Construcción de los materiales didácticos: a partir de las dos etapas previas, procedimos a la elaboración de los materiales didácticos Waldorf seleccionados (ver [Anexo D](#)), con materia prima de fácil acceso. Para ello buscamos tutoriales en la red y recurrimos a nuestros conocimientos sobre manualidades.

Etapa 6. Identificación de contenidos y estándares asociados al material didáctico: En un primer momento, para lograr el objetivo que enunciamos en la anterior etapa, realizamos

una exploración manipulativa con los materiales didácticos con el fin de establecer posibles contenidos para abordar con cada uno de estos materiales y decidir a qué septenios se podrían vincular.

Por otra parte, contemplamos la información consignada en las tablas del Anexo A, Anexo B y Anexo C, de modo tal que considerando algunos estándares básicos de competencias en matemáticas fuera posible determinar cuáles contenidos y componentes del pensamiento numérico y sistemas numéricos podrían desarrollarse tareas que impliquen el uso de estos materiales, además de poder ubicar estas tareas en posibles septenios y ciclos escolares.

Etapa 7. Creación de las tareas (vía adaptación de ideas halladas en la etapa 4 junto con la creatividad de los autores de este documento): al tener identificados los aspectos de la pedagogía Waldorf y del pensamiento numérico en relación con contenidos, requisitos, utilidad, estándares, septenios y grado escolar, creamos las tareas a partir de la discusión entre los autores del documento y la directora del trabajo de grado, teniendo en cuenta distintas adaptaciones y la redacción de explicaciones para hacer accesible la tarea a los educadores a quienes va dirigido el producto de este trabajo.

Etapa 8. Diligenciamiento de la tabla/formato diseñado: luego de considerar los elementos relevantes para la elaboración y formulación de cada una de las tareas procedimos a diligenciar el formato presentado en la Tabla 2, y simultáneamente procuramos revisar que existiera correspondencia entre la tarea diseñada, lo descrito en los documentos de política nacional y la pedagogía Waldorf.

Etapa 9. Organización de las tareas matemáticas y material didáctico Waldorf en un documento dirigido a educadores matemáticos: posteriormente, cada una de las tablas producidas en la etapa 8 fueron consignadas y organizadas en una cartilla (Anexo E) denominada

“Tareas matemáticas con material didáctico de la pedagogía Waldorf para desarrollar pensamiento numérico en estudiantes del segundo y tercer septenio.” En esta cartilla presentamos la teoría en la que se enmarcan las tareas, describimos cada uno de los kits (materiales didácticos) elaborados y posterior a cada descripción, damos a conocer las tareas asociadas a estos kits (las dos primeras correspondientes a educación básica primaria y las dos últimas a educación básica secundaria).

3.2 Fase de validación

Organizadas las tareas en una cartilla se hizo necesaria una validación de estas, para lo cual y teniendo en cuenta el público a quien dirigimos la guía, diseñamos un cuestionario en Google Forms, que se puede visualizar en el [Anexo F](#) y parte de las respuestas obtenidas en este se pueden ver en el [Anexo G](#). Los criterios tenidos en cuenta para la creación del formulario fueron: comprensión de la finalidad de la cartilla, organización de la estructura de la tarea, claridad del enfoque pedagógico utilizado, formulación de las tareas, claridad en las instrucciones de desarrollo tanto de la tarea como del uso de los materiales didácticos, pre requisitos para la implementación de las tareas, el asocio a los estándares básicos de competencias en matemáticas y asuntos matemáticos aludidos en las tareas, claridad ante los procesos a desarrollar a la luz de la pedagogía Waldorf y viabilidad de las tareas en el aula de matemáticas.

El cuestionario fue dirigido a profesores de matemáticas en ejercicio, en formación inicial, primaria, áreas distintas a las matemáticas y que enseñan matemáticas. Dimos opción para que los participantes validaran solo las tareas de primaria, solo de secundaria o las de ambos niveles.

El formulario fue compartido por medio de las redes sociales de los autores y la profesora asesora del trabajo de grado. Se compartió el formulario a egresados y estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y a conocidos interesados por la educación matemática. Además, nos fue cedido un espacio en los cursos de Geometrías no euclidianas e Inglés I para que los estudiantes matriculados en estos cursos de la Licenciatura en Matemáticas en el semestre 2023-1 nos ayudaran a diligenciar este formulario, el cual estuvo disponible por cuatro días para su diligenciamiento.

3.3 Fase de análisis

Luego de haber cerrado el formulario para la validación de la cartilla, se obtuvo respuesta de 40 personas. En la *Figura 2* presentamos información relativa al género y ocupación de los participantes en el diligenciamiento del cuestionario.

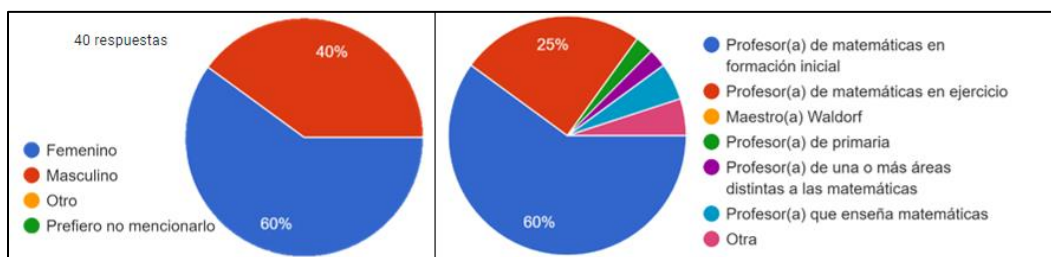


Figura 2. Contexto de la población participante en el diligenciamiento del formulario.

La mayoría de las personas que validaron la cartilla fueron de género femenino además de ser profesores de matemáticas en formación; esto segundo se puede relacionar con una de las estrategias utilizadas para la recolección de la información ya mencionada.

Para obtener información sobre la *presentación* de la cartilla, se presenta una lista de afirmaciones con el fin de que los participantes seleccionaran aquellas que consideraran que sí se cumplen en la *presentación*. A continuación, en la *Figura 3*, se presentan las respuestas organizadas en una gráfica de barras:

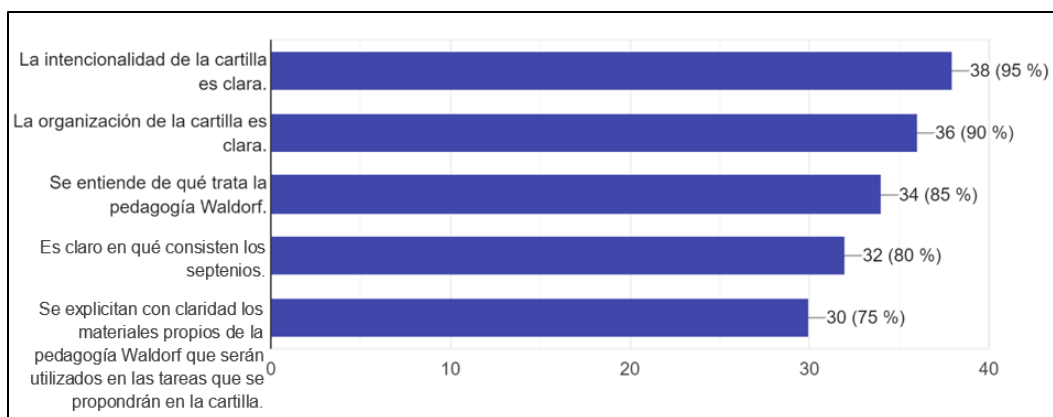


Figura 3. Respuestas relacionadas con la presentación de la cartilla.

Con respecto a los últimos tres incisos de la *Figura 3*, que fueron los de menor frecuencia, se concluye lo siguiente: a) con relación a la explicación sobre la pedagogía Waldorf, no se ve pertinente hacer cambios ya que el objetivo es hacer una contextualización general de la pedagogía, más no algo detallado. b) Respecto al cuarto aspecto (descripción de los septenios), tampoco se vio necesario hacer cambios porque al revisar de nuevo la cartilla se explicita a que allí se hace un resumen completo de los septenios en tanto ciclos de edades en los cuales los estudiantes tienen cambios en su físico, en su personalidad y en su desarrollo espiritual (según lo contemplado en la pedagogía Waldorf). c) Atendiendo al último inciso, referido a los materiales propios de la pedagogía Waldorf utilizados en las tareas propuestas, se decidió añadir una tabla con la imagen de referencia de estos para que los futuros lectores se contextualicen con los materiales didácticos porque en algunas respuestas de los participantes mencionan algo sobre el no “ver” el material.

Como fue mencionado anteriormente, dimos opción a los participantes del cuestionario de poder calificar, según su interés, la estructura, el contenido y el material de las tareas de primaria, de secundaria o de ambos niveles. Es por esto que consideramos importante dar a conocer la cantidad de personas que evaluaron cada tarea de modo que, a partir de la *Figura 4*,

fueron 28 personas las que evaluaron las tareas de primaria, 33 personas las que evaluaron las tareas de secundaria.

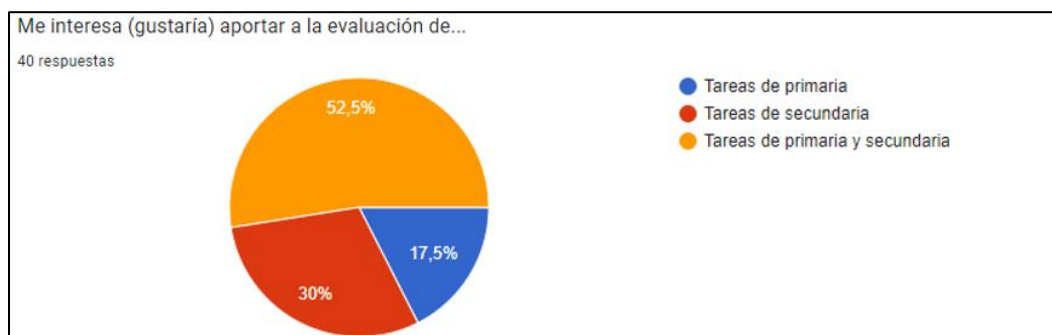
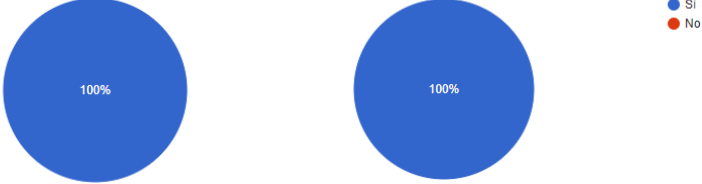


Figura 4. Decisión de los participantes para evaluar tareas de un nivel específico.

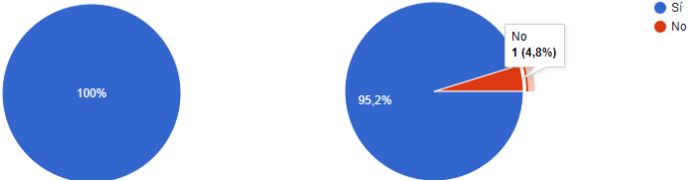
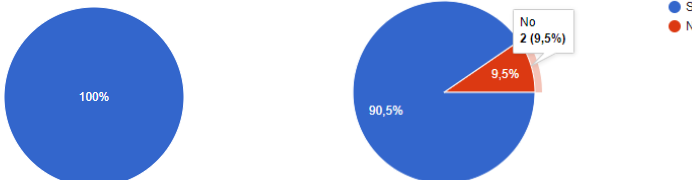
A continuación, se muestra una tabla que sintetiza los comentarios realizados respecto a cada kit. Aquí no tenemos en cuenta la valoración realizada a las tareas ya que en su mayoría son superiores a 40 puntos. En los casos en que la nota fue menor a 40 puntos, esta puntuación no fue asignada por más de dos personas; además, no recibimos comentarios asociados a dichas puntuaciones para justificar algún tipo de cambio o mejora dentro del parámetro calificado. Por el anterior motivo omitimos dichas calificaciones. Lo que decidimos entonces es hacer un análisis a partir de las respuestas de los participantes en cuanto a las preguntas abiertas.

Tabla 3


Análisis de respuestas de los participantes en la validación de las tareas propuestas.


Material didáctico y tarea asociada	Preguntas abiertas	Observaciones obtenidas en la valoración	Decisión	Justificación de la decisión
Kit gnomos Waldorf matemáticos	¿Es viable la implementación de la tarea?	<p>El 100% de los participantes que evaluaron esta tarea sí considera viable esta tarea.</p> <p>¿Es viable la implementación de la tarea? 7 respuestas 21 respuestas</p>  <p>• Sí • No</p> <p><i>“Es una actividad llamativa para los estudiantes. La selección de los estándares en relación la actividad es acertada. La tarea en términos generales es pertinente para los cursos seleccionados.”</i></p> <p><i>“Me parece que el uso de material didáctico hace que el estudiante tome más iniciativa y gusto al aprender.”</i></p> <p><i>“La tarea propuesta es viable, ya que permite desarrollar en los estudiantes el reconocimiento de las operaciones por medio de recursos didácticos de fácil acceso. Especialmente, el cuento es recurso que es usado de manera frecuente en el contexto de la mayoría de los estudiantes.”</i></p> <p><i>“Aplicaría con los estudiantes esta estrategia porque, permite que los estudiantes aprendan un concepto a través de la manipulación y se refuerza habilidades blandas como: la flexibilidad, compañerismo, trabajo en equipo y creatividad”</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Se cambió la descripción de Multi por una que se adapte más al contenido de la multiplicación. • Respecto al material, a sugerencia de dos participantes, se cambiaron las piedras por pompones de hilo de colores. • Se escribieron notas al pie de página en más secciones del cuento, precisando algunas intervenciones y momentos de diálogo entre los 	<ul style="list-style-type: none"> • Algunos de los participantes manifestaron que no fue apropiada la descripción de multi. • Se consideró importante contemplar las sugerencias por parte de los participantes del formulario para fomentar la interacción entre los estudiantes y el profesor.

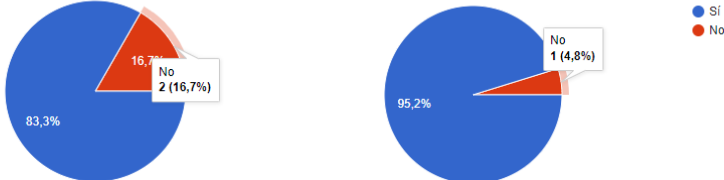
Material didáctico y tarea asociada	Preguntas abiertas	Observaciones obtenidas en la valoración	Decisión	Justificación de la decisión
	¿Por qué sí o por qué no implementaría esta tarea con estudiantes en la clase de matemáticas?	El 100% de los participantes que evaluaron esta tarea sí implementaría esta tarea.	estudiantes que el profesor puede realizar durante la implementación.	
		“ <i>Si fuera profesora de Educación Primaria la implementaría, por considerarla una actividad diferente y atrayente en la cual la matemática no pierde su esencia, por el contrario, les permite a los estudiantes reconocer situaciones en las que la suma y la sustracción pueden aplicarse.</i> ”		
		“ <i>Sí, porque es una actividad en línea con una formación integral, al buscar desarrollar el pensamiento numérico de los niños de una forma divertida, al tiempo que se reflexiona sobre un tema ético.</i> ”		
		“ <i>La tarea de los gnomos tienes beneficios, el primero es aprender objetos matemáticos a través de textos y el segundo es que es interactivo a medida que la lectura avanza el estudiante también va avanzando, no es una actividad estática.</i> ”		
	¿Qué cambios le haría a esta tarea?	“ <i>(...)Pero en la descripción que hacen de multi, considero que la descripción no es adecuada a la característica principal de la multiplicación.</i> ”		
		“ <i>Problemas para resolver en el transcurso del cuento.</i> ”		
		“ <i>No le cambiaría pero si le añadiría preguntas dónde los estudiantes tuviesen más interacción y a partir de la comunicación se pueda validar su comprensión.</i> ”		
	¿Qué le gustó o qué no le gustó de la tarea?	“ <i>No hubo algo que no me gustara, creo que es una propuesta creativa y acertada en relación con el objetivo.</i> ”		
		“ <i>Me parece super chévere e innovadora la idea de presentar las operaciones por medio de un cuento. Además de asociar verbos a la acción de agregar o quitar me parece enriquecedor.</i> ”		


Material didáctico y tarea asociada	Preguntas abiertas	Observaciones obtenidas en la valoración	Decisión	Justificación de la decisión
		<p><i>“Nada me disgustó, sin embargo si las bolitas usadas para contar son de una proporción mediana, de pronto con los grados más pequeños se presentaría algún accidente (como intentar comerlo), si son pequeñas y no hay riesgo está bien o si son grandes también.”</i></p>		
Kit círculo Waldorf	<p>¿Es viable la implementación de la tarea?</p>	<p>Aproximadamente, el 96% (27 personas) de los participantes que evaluaron esta tarea sí implementaría esta tarea.</p> <p>¿Es viable la implementación de la tarea? 7 respuestas 21 respuestas</p>  <p>...es una forma alternativa y significativa en la que los estudiantes pueden interactuar y aprender las secuencias numéricas, las tablas de multiplicar y las características geométricas de algunas figuras.”</p> <p>... la idea como los materiales se prestan para ser utilizados en cualquier momento y espacio, ... materiales no son difícil manejo para los estudiantes de esa edad y son atractivos. ”</p>	<ul style="list-style-type: none"> En el apartado de las conclusiones se dejan algunas recomendaciones como temas abiertos para posibles indagaciones con el material didáctico de la pedagogía Waldorf en relación con otros pensamientos del currículo colombiano como recomiendan en los comentarios. Respecto al uso de chinchas no se realizaron cambios. No se modifican los estándares. Se 	<ul style="list-style-type: none"> La finalidad del trabajo es netamente el enfoque del material didáctico en el pensamiento numérico y sistemas numéricos. No se consideró significativo cambiar los chinchas, pues en el diseño del círculo se especifica cómo se protegen para no tener riesgos de accidentes. Los profesores que deseen implementar la tarea pueden ver
	<p>¿por qué sí o por qué no implementaría esta tarea con estudiantes en la clase de matemáticas?</p>	<p>Aproximadamente el 93% (26 personas) de los participantes que evaluaron esta tarea sí implementarían esta tarea.</p> <p>¿Implementaría esta tarea con estudiantes en la clase de matemáticas? 7 respuestas 21 respuestas</p> 		

Material didáctico y tarea asociada	Preguntas abiertas	Observaciones obtenidas en la valoración	Decisión	Justificación de la decisión
		<i>“Dependiendo del curso específicamente, los chinchos pueden ser peligrosos si los manipulan los estudiantes. Y por otro lado para los más grandes 12 años... les puede parecer "ridículo el conteo"”</i>	<p>añadió una instrucción para el profesor de manera que aluda a los números pares a partir de la tabla del 2.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Se hace una sugerencia de crear un cuento para la tarea e implementar según la consideración que se tuvo del material. • Se consignaron en la tabla los nombres de las figuras formadas con el círculo Waldorf. 	<p>utilidad desde otras perspectivas y sentirse en libertad de realizar adaptaciones según sus criterios matemáticos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Se incluyen los nombres de las figuras formadas por el círculo y las lanas ya que para todos los profesores no es claro el nombre que toma cada una de estas y se les da la herramienta para que lo recuerden o aludan a ellas con facilidad.
		<i>“La idea es que ellos se den cuenta de las regularidades que tienen las tablas de multiplicar y creo que por medio del comportamiento del hilo se puede conjeturar.”</i>		
		<i>“Siento que la construcción de este es más complicada para el propósito, si la intención es reforzar el conteo podría usar cuentas de colores.”</i>		
		<i>“(…)la combinación que se hace con el arte y adicionalmente se puede aprovechar los resultados de los estudiantes para después explicar otros objetos matemáticos como la simetría”</i>		
	¿Qué cambios le haría a esta tarea?	<i>“Tal vez algo más explícito para lo que sucede con la tabla del 10 en adelante.”</i>		
		<i>“Tal vez le incorporaría nuevamente la idea de un cuento, siento que lo volvería más atractivo para los niños”</i>		
		<i>“Ninguno, el material lo utilizaría para otros temas de geometría.”</i>		
		<i>“No sé específica (...) el uso de los chinchos.”</i>		
		<i>“(…)trabajar propiedades de los ángulos de los polígonos regulares y regularidades en el número de diagonales”</i>		
	<i>“Modificaría un poco los estándares para que fueran más puntuales respecto a lo que se logra con la tarea, pues en la secuencia no se evidencia ver en qué momento los estudiantes pueden identificar números pares, impares u otras regularidades(…)”</i>			
		<i>“Siento que faltó ampliar un poco la idea de inspiración para los estudiantes(…)”</i>		

Material didáctico y tarea asociada	Preguntas abiertas	Observaciones obtenidas en la valoración	Decisión	Justificación de la decisión
	¿Qué le gustó o qué no le gustó de la tarea?	<p><i>“Tal vez los estudiantes no comprendan o no sepan cuáles son las figuras que se crean, no sé si sería oportuno mencionarlo de una vez o pasarlo por alto.”</i></p> <p><i>“Me gusto la metodología, los materiales y la propuesta de pedir a los estudiantes ponerse de pie y llevar al ritmo al son de los números.”</i></p> <p><i>“La transición de la actividad de las manos y los pies, hasta llegar a la formalización de las tablas de multiplicar. Considero que está muy completa y las transiciones son adecuadas y suficientes para la finalidad que tiene el tema.”</i></p>		
Kit mandala Waldorf	¿Es viable la implementación de la tarea?	<p>Aproximadamente el 97% (32 personas) de los participantes que evaluaron esta tarea considera viable la propuesta y su implementación.</p> <p>¿Es viable la implementación de la tarea? 12 respuestas 21 respuestas</p>  <p>● Si ● No</p> <p><i>“Por la gran cantidad de formas que se pueden generar con las diferentes secciones de la mándala en dónde el todo puede estar conformado por diferentes secciones y por la motivación que genera el dar diferentes opciones de representar creativamente un todo, la tarea es viable a mi criterio para generar una noción de fracción.”</i></p> <p><i>“Porque es una tarea muy interesante de material concreto que ayuda no solo a los objetivos propuestos sino que también apoya la imaginación y la creatividad.”</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> Se modificaron los posibles cursos a los cuales se tenía planeado implementar esta tarea. Se hace una precisión al pie de página al comenzar la secuencia de enseñanza, para sugerir el modo de trabajo individual por parte de los estudiantes. Y trabajo grupal al socializar 	<ul style="list-style-type: none"> En los documentos curriculares nacionales la enseñanza de las fracciones puede llevarse a cabo en el ciclo sugerido por uno de los participantes 5° - 6°. Se recupera la importancia del valor transdisciplinar de las tareas. Y se rescata la idea

Material didáctico y tarea asociada	Preguntas abiertas	Observaciones obtenidas en la valoración	Decisión	Justificación de la decisión						
		<p><i>“No me parece apropiada para grado 7. Creo que los contenidos temáticos son para grado 6 o primaria”</i></p>	<p>conjeturas y resultados.</p> <ul style="list-style-type: none"> Se añadieron en el apartado de ideas para inspirar a profesores algunas relativas a tareas para desarrollar otros tipos de pensamiento matemático. Se añade como idea adicional para la elaboración de otras tareas, hacer una propuesta desde la representación gráfica continua de las fracciones. 	<p>de que los pensamientos matemáticos y sistemas no se desarrollan necesariamente de forma aislada.</p> <ul style="list-style-type: none"> Algunos de los participantes manifestaron inquietudes respecto a la forma en cómo se trabajan estas fracciones a partir de la unidad. En ese sentido es importante aludir a que se hace alusión a la interpretación de la fracción en la relación parte todo y en la interpretación como razón y quizá esto no fue claro para todos los participantes. 						
	<p>¿Por qué sí o por qué no implementaría esta tarea con estudiantes en la clase de matemáticas?</p>	<p>Aproximadamente el 97% (32 personas) de los participantes que evaluaron esta tarea considera viable la propuesta y su implementación.</p> <p>¿Implementaría esta tarea con estudiantes en la clase de matemáticas?</p> <p>12 respuestas 21 respuestas</p>  <table border="1" style="display: none;"> <caption>Survey Results for Question: ¿Implementaría esta tarea con estudiantes en la clase de matemáticas?</caption> <thead> <tr> <th>Respuesta</th> <th>Porcentaje</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Sí</td> <td>91.7%</td> </tr> <tr> <td>No</td> <td>8.3%</td> </tr> </tbody> </table>			Respuesta	Porcentaje	Sí	91.7%	No	8.3%
	Respuesta	Porcentaje								
	Sí	91.7%								
	No	8.3%								
		<p><i>“la implementaría porque es interesante la idea de abordar el concepto de fracción utilizando fichas (...) pueden ser utilizadas también para crear diferentes representaciones artísticas que sirvan como motivador para los estudiantes; de igual manera, las instrucciones para representar las fracciones considero que son acordes a la edad de los estudiantes, así que la idea sí se entendería con facilidad.”</i></p>								
	<p><i>“Siento que se podrían explotar diferentes habilidades, por ejemplo en el pensamiento métrico y espacial en términos de áreas”</i></p>									
<p>¿Qué cambios le haría a esta tarea?</p>	<p><i>“Que fuera individual en los procesos claves pero que las conclusiones se discutan en conjunto”</i></p> <p><i>“Tengo conflictos con el asunto cuando se habla de 4/10 o 5/20 o cualquier fracción en general, ya que los elementos que contienen no son iguales y a futuro podría causar una dificultad de aprendizaje.”</i></p> <p><i>“Quizá no lo leí, pero siento que se debe hacer una precisión en términos del área de cada fragmento.”</i></p>									

Material didáctico y tarea asociada	Preguntas abiertas	Observaciones obtenidas en la valoración	Decisión	Justificación de la decisión
	¿Qué le gustó o qué no le gustó de la tarea?	<p><i>Considero que las tareas propuestas pueden llegar a generar interés en los estudiantes, saliéndose de los tradicional a lo que están acostumbrados y explorando otro tipo de material</i></p> <p><i>“No manifiesta el tiempo de implementación sugerido o adecuado.”</i></p> <p><i>“Que para el apartado de las fracciones, puede generar en los estudiantes confusión más adelante cuando se hable de áreas con las fracciones, ya que pueden entender que se toman partes no iguales, partes con diferente forma y tamaño (o área)”</i></p> <p><i>“Los estudiantes pueden crear figuras y dar a volar su imaginación a la vez que van asociando su concepción sobre fraccionarios.”</i></p>		
Kit arcoíris Waldorf	¿Qué cambios le haría a esta tarea?	<p>Aproximadamente el 91% (30 personas) de los participantes que evaluaron esta tarea sí ve viable la implementación de la tarea.</p> <p>¿Es viable la implementación de la tarea?</p> <p>12 respuestas 21 respuestas</p>  <p><i>“Constituye una oportunidad para que los estudiantes reconozcan “el origen” de un número.”</i></p> <p><i>“Es una forma muy diferente de pensar como el dar un tema tan poco comprendido en las aulas, de una forma diferente y completa.”</i></p> <p><i>“No sé corresponde con el objetivo debe ajustar aunque la tarea es muy interesante junto con el material”</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • No se cambió el objetivo de la tarea. • No se hicieron cambios respecto al cierre pero se dan recomendaciones al profesor para este. • No se hacen cambios a la estructura del material. 	<ul style="list-style-type: none"> • La tarea tiene como finalidad ayudar a la comprensión de la “noción” de números irracionales, además de tener un carácter pre-instruccional, por ende no se pretende presentar el contenido con esta pero si dar un apoyo.

Material didáctico y tarea asociada	Preguntas abiertas	Observaciones obtenidas en la valoración	Decisión	Justificación de la decisión
	<p>¿por qué sí o por qué no implementaría esta tarea con estudiantes en la clase de matemáticas?</p> <p>¿Qué cambios le haría a esta tarea?</p> <p>¿Qué le gustó o qué no le gustó de la tarea?</p>	<p>Aproximadamente el 94% (31 personas) de los participantes que evaluaron esta tarea sí implementaría esta tarea.</p> <p>¿Implementaría esta tarea con estudiantes en la clase de matemáticas?</p> <p>12 respuestas 21 respuestas</p>  <p>● Sí ● No</p> <p><i>“Es demasiado trabajo, creo que se invierte mucho tiempo de aula para realizar la tarea.”</i></p> <p><i>“La implementaría porque son recursos que se salen de lo usual, va hacía el lado de manualidad y de hacer con las manos, lo cual haría de la clase de matemáticas algo diferente y divertido”</i></p> <p><i>“(…)el uso de material concreto hace la diferencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje, además, es una forma diferente y entretenida de hacer aproximaciones del número π”</i></p> <p><i>“Mucho tiempo de aula y poco desarrollo matemático. Porque hay que ajustarla sobre todo el cierre de la tarea.”</i></p> <p><i>“Lo haría debido al componente sensorial-cognitivo que se puede desarrollar mediante está tarea en los estudiantes.”</i></p> <p><i>“No le haría ningún cambio. Sólo a modo de sugerencia, es importante tener cuidado en la forma en cómo miden los estudiantes(…)”</i></p> <p><i>Tal vez incluir en el arcoíris más arcos para que la aproximación sea un poco más precisa</i></p> <p><i>Hay que redefinir el objetivo y el cierre de la tarea se puede mejorar un poco</i></p> <p><i>“Es interesante la relación existente entre los colores, las lanas, y el objeto matemático a enseñar. En síntesis es adecuado (...) aprendizajes realmente memorables para los estudiantes.”</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> Se añadieron en ideas para inspirar a profesores ejemplos para implementar o ampliar la noción de llegar a un número irracional mediante la exploración, la cual en este preciso momento sobre la vivencia más que la conceptualización. 	<ul style="list-style-type: none"> Se añadieron algunas recomendaciones con respecto al cierre de la tarea para dar continuidad con el tema oficial y se hace hincapié que el profesor es libre en realizar adaptaciones para los objetivos propios de la clase.

Material didáctico y tarea asociada	Preguntas abiertas	Observaciones obtenidas en la valoración	Decisión	Justificación de la decisión
		<p><i>“Me parece pertinente que ellos realicen conjeturas a partir de mediciones y relaciones”</i></p> <p><i>“Sí pero podría ampliarse, hacer un proceso más exploratorio”</i></p> <p><i>“Podrían darse ejemplos o secuencias más específicas para que el objetivo se puede alcanzar de mejor forma.”</i></p>		

La implementación del cuestionario de validación permitió evidenciar los siguientes resultados respecto a la recomendación de la cartilla y cómo sintieron (los participantes) la lectura de esta propuesta de tareas:

Tabla 4

Comentarios finales de participantes respecto a la cartilla de tareas.

Comentarios finales – Validación de tareas				
<i>“La recomendaría porque, considero que son tareas que se pueden implementar en los colegios cuya pedagogía no sea la pedagogía Waldorf. Ya que, los materiales son sencillos de utilizar y el concepto que se aborda en cada uno de ellos es algo estipulado en el currículo Colombiano.”</i>	<i>“Publicar este trabajo por redes, en artículos y hacer videos de que barren la experiencia con los profes que ya lo hayan hecho en sus clases. Me parece un material maravilloso para el aula. Felicidades.”</i>	<i>“Recomendaría esta cartilla (...) a veces resulta difícil encontrar material concreto tan bien descrito y con un objetivo tan claro. Esta cartilla ayuda al proceso de enseñanza-aprendizaje, logrando desarrollar las competencias descritas en la misma.”</i>	<i>“Sí la recomendaría porque son ideas llamativas para los estudiantes y son tareas en dónde el rol del estudiante es activo y están diseñadas para que sean ellos los constructores de su conocimiento”</i>	<i>“Es una cartilla completa, con una explicación muy detallada de las actividades y la forma en como el uso de materiales cotidianos se pueden dar temas que son bases (...) de las matemáticas. También, es una puesta grande a dar una visualización de propuestas diferentes y significativas para desarrollar en el aula”</i>

Los comentarios realizados al finalizar el formulario con respecto a la recomendación de las tareas y el uso de estas nos permitieron identificar que la metodología de validación fue acertada, ya que obtuvimos respuestas fundamentadas para concluir que en general la propuesta de tareas fue satisfactoria. Uno de los aspectos que nos permitió concluir lo anterior fue porque los participantes lograron resaltar, dentro de los

comentarios, aspectos fundamentales de la pedagogía Waldorf como: la relación entre las expresiones verbales con el uso de símbolos matemáticos, la relevancia de la literatura como medio para la enseñanza, la importancia del uso y una previa exploración de material manipulable para favorecer un primer acercamiento del estudiante con objetos matemáticos; también a algunos de los participantes les llamó la atención los movimientos corporales y en general cómo la enseñanza de las matemáticas, en la pedagogía Waldorf, está permeada por el arte. Los participantes resaltaron en los comentarios la importancia de que la enseñanza sea íntegra y aborde situaciones en las que los estudiantes formen su ser respecto a valores éticos, la creatividad y su autonomía. Los participantes también notaron el potencial de los materiales presentados para extender su uso y poder enseñar otros objetos matemáticos relacionados con los presentados en cada propuesta de tareas.

Algunos de los participantes manifestaron preocupación respecto al tiempo de construcción de algunos de los materiales didácticos presentados, y no entendieron para qué se usan algunos de los materiales para su elaboración, con lo cual recomendamos que, si el profesor tiene la intención de construir los materiales didácticos en conjunto con sus estudiantes y el apoyo de sus familias, se busque un trabajo interdisciplinar con áreas como artística para favorecer la elaboración de estos materiales y puedan ser usados en la clase de matemáticas.

En general obtuvimos comentarios bastante positivos, estos resaltaron el interés y el apoyo al proceso de aprendizaje de los estudiantes, aclarando que no siempre es fácil encontrar material didáctico tangible con descripciones acertadas para su uso. Adicional a lo anterior los participantes fueron propositivos al compartir más ideas del uso de estos materiales para abordar otras temáticas de estudio. Los aspectos anteriores nos permitieron concluir que los materiales didácticos propuestos en las tareas son de provecho en las aulas de matemáticas, siempre y cuando el profesor esté dispuesto a implementar clases diferentes involucrando este tipo de tareas con materiales didácticos que favorezcan la enseñanza de objetos matemáticos abstractos y despierten el interés de los estudiantes para aprender matemáticas de una forma agradable y llamativa.

Capítulo IV. Versión final - Guía para educadores matemáticos

A partir de los resultados obtenidos en el cuestionario de validación de las tareas por parte de los participantes y el análisis de estas respuestas, realizamos sobre una copia de la cartilla presentada en el Anexo E, una serie de modificaciones para producir una versión con la mejora de los aspectos contemplados en la validación con respecto a los comentarios y recomendaciones que consideramos relevantes para esta nueva versión.

Constituimos así la versión definitiva de la guía para educadores matemáticos que deseen vincular materiales didácticos fundamentados desde la pedagogía Waldorf con algunos objetos propios del pensamiento numérico y los sistemas numéricos, con el fin de inspirarlos a realizar, modificar o adaptar otras tareas con ayuda de los materiales didácticos presentados en esta misma dirección. La versión definitiva se presenta en seguida:

Tareas matemáticas con materiales didácticos de la pedagogía Waldorf

para desarrollar el pensamiento numérico en
estudiantes del segundo y tercer septenio



Tareas matemáticas con materiales didácticos de la pedagogía Waldorf para desarrollar el pensamiento numérico en estudiantes del segundo y tercer septenio

Guía práctica para educadores matemáticos

Autores:

Daniel Enrique Niño Porras

Luz Andrea Romero Fajardo

Estudiantes Licenciatura en Matemáticas UPN

Revisado por:

Lyda Constanza Mora Mendieta

Profesora Licenciatura en Matemáticas UPN

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Licenciatura en Matemáticas

2023

Índice

Índice.....	76
Presentación.....	77
Pedagogía Waldorf	78
Kit gnomos Waldorf matemáticos	82
Cuento – Operaciones matemáticas – Adición y sustracción	83
Los amigos matemáticos y el acertijo de las piedras mágicas	87
Kit círculo Waldorf	94
Multipliquemos sumando: conteos y ritmos.....	96
Kit mandala Waldorf	105
Noción de fracción e interpretación parte-todo con la “ <i>Fracdala</i> ”	106
Kit arcoíris Waldorf	112
Aproximando a π con el arcoíris Waldorf	113

Presentación

La presente guía denominada “Tareas matemáticas con materiales didácticos de la pedagogía Waldorf para desarrollar el pensamiento numérico en estudiantes del segundo y tercer septenio”, es producto del trabajo de grado titulado “Materiales didácticos para aprender matemáticas desde la Pedagogía Waldorf”, para optar al título de licenciados en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, D.C., Colombia). Tiene la finalidad de dar a conocer diferentes tareas que involucran el uso de materiales didácticos para la enseñanza y el aprendizaje de objetos matemáticos y procesos relativos al pensamiento numérico y sistemas numéricos.

Se comparte esta guía a maestros titulados y maestros en formación inicial interesados en implementar estas tareas para, entre otros propósitos, desarrollar el pensamiento numérico en sus estudiantes. Se enseñan los materiales didácticos contemplados para la elaboración de esta guía y seguido de la presentación de cada uno se encuentran las tareas que involucran el uso de dicho material. Las tareas que se presentan a continuación están divididas en dos partes:

La primera parte contiene una descripción de los elementos que se deben utilizar para cada tarea con una breve descripción de las principales características y aspectos generales para tener en cuenta. La segunda parte contiene una tabla con los elementos característicos a contemplar en la planeación y ejecución de la tarea; asimismo se consignan algunas indicaciones de cómo desarrollar la secuencia de enseñanza de cada tarea. Algunos de estos elementos están relacionados con la intencionalidad de la tarea (requisitos, objetivos y metas), con el nivel escolar de los estudiantes al cual va dirigida la tarea, con los asuntos matemáticos y las características fundamentales de la tarea en relación con la pedagogía Waldorf y

con algunos de los estándares del nivel escolar y del contenido respectivo que atienden a los referentes curriculares nacionales (MEN, 2006).

Pedagogía Waldorf

Para que entendamos un poco de qué se está hablando, conozcamos o identifiquemos qué es la pedagogía Waldorf. La pedagogía Waldorf es un modelo pedagógico fundado por Rudolf Steiner en el año 1919. Steiner fue un filósofo, escritor, educador y fue creador de la antroposofía, ciencia que contempla al ser humano como un ser tripartito formado por cuerpo, alma y espíritu. (Marcos, 2014).

Steiner planteó como principios de la Pedagogía Waldorf, por un lado, comprender la naturaleza del ser humano a partir de sus desarrollos evolutivos divididos en septenios (etapas de 7 años cada uno), y, por otro lado, la importancia del papel del maestro como facilitador del proceso de desarrollo del individuo (estudiantes). Lo anterior visto desde tres aspectos que se constituyen en los supuestos que sustentan estos procesos de comprender el desarrollo evolutivo en la formación de estudiantes en marco de la pedagogía Waldorf, que son: el teórico, el filosófico y el metodológico (Cruz, 2015).

Según Carlgren (1989), en los inicios de la pedagogía Waldorf fueron separados los ciclos escolares gracias a los estudios de Rudolf Steiner sobre la evolución del ser humano. Esta idea de los ciclos educativos fue creada por Steiner, quien propuso que la mente, el cuerpo y el espíritu de cada individuo va evolucionando en períodos de 7 años denominado septenios, ya que durante estas épocas los individuos (estudiantes) suelen tener cambios importantes no solo físicos, sino también emocionales e intelectuales. Dado nuestro interés particular por la pedagogía Waldorf y en ver su funcionalidad para la educación matemática y particularmente el desarrollo del pensamiento numérico, la propuesta de tareas que se presentan en

esta guía docente enfatiza en torno al segundo y tercer septenio que explicaremos brevemente a continuación:

Segundo septenio (de los 7 años a los 14 años). En el segundo septenio los estudiantes inician la escuela en términos de la formalidad. La jornada escolar está estructurada siguiendo un ritmo que “oscila entre captar y vivenciar, y entre realizar y crear, lo que se puede considerar como un gran ritmo de aspiración y espiración” (Marcos, 2014, p. 34). En las escuelas Waldorf se reconoce que a medida que los niños desarrollan habilidades para procesos intelectuales, se les dan materias que exigen mayor saber, acompañado de materias complementarias que son enfocadas en el desarrollo integral de los estudiantes como pintura, crayola, cocina, jardinería, entre otras según el grado escolar.

En este septenio se marca la diferencia con respecto a la forma de enseñar en la pedagogía Waldorf y en la enseñanza tradicional, ya que se pretende que las temáticas sean abordadas, en un principio, con historias y cuentos que ayuden a generar en los niños imágenes de los objetos de aprendizaje de diferente tipo. Posteriormente existe una transición de una representación figural a construir una definición del objeto y darle un nombre propio. El aprendizaje está articulado siempre con un sentido artístico y los docentes son los encargados de despertar el interés y entusiasmo de los niños. Su formación debe ser voluntaria y no de obligación, por consiguiente, la voluntad de los estudiantes se moldea en libertad de sus propios derechos.

Tercer septenio (de los 14 años a los 21 años). En esta etapa se desarrollan a fondo los conceptos abstractos en relación con los contenidos correspondientes al año escolar que pertenezcan los estudiantes. En este periodo de tiempo cambia la concepción pedagógica, se da una educación a través del pensamiento, ya que se espera que los jóvenes estén listos para dar juicios y críticas a partir de sus





conocimientos; por lo tanto, el aprendizaje estará mayormente centrado por el razonamiento. Sin embargo, se mantiene la intención de desarrollar actividades que contribuyan a la autonomía y libertad de los estudiantes.

Con estas ideas se pretende hacer una propuesta de tareas matemáticas para estudiantes en estos rangos de edades, de modo que sea posible potenciar el pensamiento numérico y sistemas numéricos mediante dichas tareas y el uso de materiales manipulativos que estén permeados de un sentido artístico y agradable para los y las estudiantes. Además, estos materiales tienen una tipificación o utilidad relacionada con el momento en el que son implementados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se clasifican así:

- **Pre – instruccional:** este tipo de material se utiliza al momento de introducir un concepto. Con el uso de este se resalta la pertinencia de utilizar objetos que permitan la exploración de los estudiantes y un primer acercamiento al objeto a enseñar.
- **Co – instruccional:** es el tipo de material utilizado durante la enseñanza de un concepto. El material favorece la enseñanza, pues sirve como apoyo en este proceso.
- **Post – instruccional:** como su nombre lo indica, este material se usa posterior a la instrucción o a la enseñanza con el fin de fortalecer el aprendizaje del concepto enseñado.

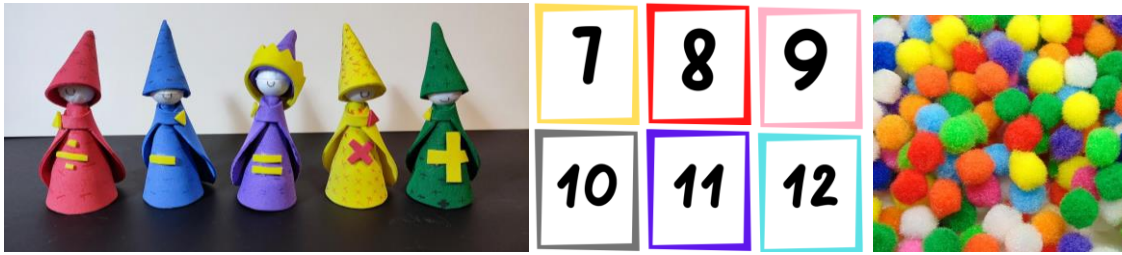
Con esta contextualización general, ahora sí veremos las tareas que están diseñadas a partir del uso de materiales propios de la pedagogía Waldorf como lo son: el círculo de multiplicación Waldorf, los gnomos Waldorf, el arcoíris Waldorf y la mandala Waldorf. Estos son los principales materiales de la pedagogía en mención

para la enseñanza de las matemáticas. Cabe mencionar que estos materiales fueron de fácil elaboración con bajo costo.

Nombre del material	Tipo de material	Imagen del material
Círculo de multiplicación Waldorf	Estructurado Pre – Co – Post instruccional	
Gnomos Waldorf	Estructurado Co – Instruccional	
Arcoíris Waldorf	No estructurado Co – Instruccional	
Mandala Waldorf	No estructurado Co – Instruccional	

Nota: para la construcción de los anteriores materiales didácticos sería pertinente contar con el apoyo del área de artística generando una transversalización de áreas junto con las matemáticas, para apoyar procesos de enseñanza en ambas áreas y así poderse implementar en las siguientes tareas propuestas (y/o adaptaciones que se realicen).

Kit gnomos Waldorf matemáticos



Kit gnomos Waldorf. Fotografía del material elaborado por los autores.

Materiales para su elaboración:

- Bolitas de icopor
- Papel foami o fieltro de colores
- Silicona líquida.

Tutorial de elaboración: <https://www.youtube.com/watch?v=oF366THIVEA>

Descargable para imprimir: <https://tinyurl.com/2qajhvwb>

En la pedagogía Waldorf las historias fantásticas y los cuentos cobran especial importancia para el aprendizaje de los estudiantes, ya que son un medio para dejar, en un principio, imágenes en los estudiantes sobre los saberes, permitiendo un primer acercamiento a estos. Por tanto, las figuras gnomos Waldorf, junto con una buena historia, pueden ser una combinación favorable para la enseñanza de los números, de algunas operaciones matemáticas y para comprender los efectos de dichas operaciones sobre los números involucrados.

Descripción del kit

Este kit consta de los gnomos Waldorf matemáticos, que son figuras pequeñas con forma humana hechos con foami, adaptados para la enseñanza de las matemáticas de forma tal que cada una lleva en su atendo uno de los símbolos de las operaciones matemáticas; el kit también trae un paquete de tarjetas con numerales del uno al quince y un paquete de pompones de colores. Presentamos a continuación una primera tarea para despertar el interés en los estudiantes sobre las operaciones matemáticas básicas que permita en ellos dejar volar su imaginación al escuchar el cuento e ir creando imágenes y relacionando los conceptos abordados a partir de un hacer matemático y creativo con la guía del profesor/a.

Cuento – Operaciones matemáticas – Adición y sustracción			
Material: gnomos Waldorf matemáticos			
Requisitos	Verificar que los estudiantes: <ul style="list-style-type: none"> • Sepan contar hasta 50 • Reconozcan los numerales hasta 50 		
Objetivo o meta	Reconocer los efectos de las operaciones básicas entre números naturales, particularmente de la adición y la sustracción.		
Aspectos de la pedagogía Waldorf con los que la tarea se relaciona	<ul style="list-style-type: none"> • Narraciones. • Imaginación. • Exploración. • Enseñanza de operaciones matemáticas básicas simultáneamente. 	Estándar(es) básico(s) de competencias matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> • Comprender los efectos de sumar y restar números naturales. • Uso representaciones (principalmente concretas y

			pictóricas) para establecer equivalencias de un número.
		Aspecto del pensamiento numérico	Comprensión del significado de las operaciones.
		Contenido(s) del pensamiento numérico asociado(s) a la tarea	Adición y sustracción números naturales a partir de acciones relacionadas a la adición y sustracción.
Utilidad	Co-instruccional	Posible grado escolar	2º-3º
		Septenio	2 (7-14 años)
Asuntos matemáticos relacionados al tema del pensamiento numérico y sistemas numéricos	<p>Por una parte, hay acciones cotidianas que se relacionan con la adición (+), que pueden ser representadas matemáticamente con esta operación. Estas son: juntar, agregar, añadir, etc.</p> <p>Para el abordaje de la adición es visible la acción de juntar y agregar por parte de los personajes del cuento. Esto es posible, gracias a que se dispone de una colección de pompones de diferentes colores, tamaños y formas las cuales se presentan en dos grupos separados, después se juntan y se tiene una cantidad total de pompones sin importar sus características.</p> <p>Por otra parte, existen otras acciones cotidianas que se relacionan con la sustracción (-), que también pueden ser representadas matemáticamente con esta operación.</p> <p>En el cuento se presenta una situación en la que uno de los personajes pierde cierta cantidad de pompones de una colección que tenía. Al presentar situaciones de quitar elementos de algún grupo de objetos se efectúa internamente la sustracción.</p>		

<p>Proceso a desarrollar atendiendo a la pedagogía Waldorf</p>	<p>A partir de la lectura se pretende dejar en los estudiantes imágenes que les permitan:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identificar las operaciones matemáticas básicas. • Explorar y conocer diferentes representaciones de los números. • Operar sobre cantidades. • Reconocer los efectos de las operaciones sobre los números. • Reconocer el signo igual como una equivalencia entre expresiones con sumas y restas. <p>Se pretende recolectar una colección de imágenes sobre los números, operaciones y los resultados de operar diferentes números para darle un significado posteriormente.</p>
<p>Secuencia de enseñanza: significado de la adición</p>	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Organizar a los estudiantes por equipos de tres con los siguientes materiales para cada equipo: <ul style="list-style-type: none"> • Gnomos Waldorf con signos de las operaciones básicas (+, −, ×, ÷) y la relación de igualdad (=). • Tarjetas con numerales. • Pompones de colores. • Cuento guía: enseguida de la presente tabla se presenta un cuento que acompaña el desarrollo de la actividad en clase que está sujeto a adaptaciones y a ser complementado por parte del docente. 2. El/la profesor/a lee el cuento “<i>Los amigos matemáticos y el acertijo de las piedras mágicas</i>” (Anexo). A medida que la lectura va fluyendo, y los estudiantes prestan atención, el docente puede realizar pausas para enseñar estas operaciones matemáticas e interactuar con los gnomos, recreando las escenas que se van narrando en el cuento, permitiendo también que los estudiantes puedan manipular el material. 3. Pausas para actividades de exploración con los estudiantes, e identificar los efectos de las operaciones: <ul style="list-style-type: none"> • Adición • Sustracción <p>Al momento de abordar las operaciones con la lectura, el profesor puede profundizar en la explicación de los efectos de estas: Asignando a sus estudiantes realizar algunas sumas y restas con los pompones de colores, las tarjetas con los numerales y, por supuesto, con los gnomos Waldorf, como se ejemplifica en la siguiente figura:</p> 	



Gnomos Waldorf. Material elaborado por los autores.

El profesor puede hacer preguntas para que los estudiantes interactúen entre ellos y con el profesor. Se presentan sugerencias en algunas notas al pie de página para que sean tomadas en cuenta por el docente.

4. Para finalizar la clase, el profesor puede preguntar a los estudiantes qué tal les pareció la historia. Seguidamente puede realizar preguntas sobre los personajes del cuento que, en este caso, tienen como roles los efectos de las operaciones al operar con números. Con esto último se puede concluir la actividad con la institucionalización de estas operaciones matemáticas básicas, aludiendo a los efectos de estas operaciones a partir de las acciones explicadas anteriormente en este esquema.

Otras ideas para inspirar a profesores

1. Comprender significado de la adición: añadir (problemas de transformación), reunir (problemas de combinación-composición), comparar e igualar.
2. Comprender el concepto de “ser divisor de” (hacer colecciones de pompones de igual cantidad en ciertos números de canastos).
3. Comprender los significados de la división (cuotitiva y partitiva).
4. Relacionar la idea de siguiente-sucesor de un número con el efecto de sumar 1 a un número dado.
5. Abordar las relaciones de orden a partir de la creación de otros gnomos Waldorf con los símbolos respectivos ($<$, \leq , $=$, \geq , $>$). Puede considerarse en crear una historia relativa a este objeto matemático.

	<p>6. Permitir a los estudiantes crear sus propias historias y problemas. Sin embargo, es importante que el docente establezca condiciones para que las producciones de los estudiantes desarrollen conocimiento matemático.</p> <p>7. Reforzar o comprender el significado de la adición y demás operaciones matemáticas básicas haciendo uso de la “Caja Mackinder”. Su uso se presenta en el siguiente video: https://www.youtube.com/watch?v=kPvTldAZHuw&t</p>
--	--

Anexo

Con notas al pie de página a lo largo del cuento se hacen sugerencias de preguntas y acciones a realizar por el profesor para abordar, desde la misma situación, diferentes formas que se relacionan con la adición y la sustracción. Si el profesor desea, puede realizar más pausas de las sugeridas para abordar diferentes problemas y situaciones en las que se trabaje la adición y sustracción.

Los amigos matemáticos y el acertijo de las piedras mágicas

En el Reino de los Números, un país gobernado por el rey Igual, el más justo y honesto de todos, vivían cuatro enanitos muy particulares. Ellos vestían atuendos con extravagantes colores y en estos llevaban unos dibujos bordados con hilo de plata. Los enanitos se llamaban Adi, Sus, Multi y Divis.⁸

Adi era una fanática de recolectar cosas que encontraba por el bosque, ella reunía objetos que sus amigos le regalaban, y le gustaba presumirlos. Por otro lado, Sus, un enanito bastante testarudo y pedigüeño, siempre perdía las cosas que sus amigos le daban e intentaba quitarle las cosas a los demás. *¡Ay Sus! Eso no se hace, le*

⁸ [El docente tendrá en cuenta que Adi (Adición) es el gnomo de la suma, Sus (Sustracción) el gnomo de la resta, Multi el gnomo de la multiplicación y, finalmente Divis el gnomo de la división. Sin embargo, se sugiere no mencionar algo al respecto para que los niños dejen volar su imaginación al pensar por qué esos nombres.]

decían sus amigos; pero él insistía en que esto no estaba mal porque él siempre lo hacía a vista de todos.⁹ Por su parte, Divis era una enanita que le encantaba regalarle cosas a sus amigos, procurando repartir siempre la misma cantidad a cada uno de ellos. Y Multi, era un enanito bastante ágil para organizar sus pertenencias. De hecho, le gustaba hacer arreglos con forma rectangular, y le gustaba organizar de esta forma los objetos que Adi recolectaba; de modo que esto le facilitaba contar cuántos objetos tenía. Estos enanitos se ocupaban de explorar cuevas y montañas cercanas al reino, para llevar minerales y recursos destinados a los trabajadores de este país.

Un día, un mensajero llegó apresurado a comunicarle al rey que, debido a un fuerte temblor en la tierra, una misteriosa cueva había quedado a la vista, y de ella salían bellos destellos y haces de luces. Inmediatamente el rey Igual llamó a los cuatro enanitos exploradores para investigar los secretos de esta cueva.

—Necesito, por favor, que se dirijan a la cueva de la que el mensajero habla—

Exclamó el rey Igual. *—¡Pero tengan mucho cuidado! No sabemos lo que hay allí—*

Añadió él, muy preocupado.

—No se preocupe, su majestad— Respondieron al unísono los cuatro enanos.

—Trataremos de reunir los materiales y recursos que más podamos para traerlos aquí al reino. — Dijo Adi, muy motivada.

Siendo así, los enanitos tomaron rumbo hacia la cueva, guiados por el mensajero que la encontró. De camino a este lugar, atravesaron por verdes bosques, cruzaron en una balsa un azul río, era tan azul que parecía una parte del cielo en la tierra.

Tuvieron que acampar, pues se empezó a oscurecer. Allí, los enanitos junto con el

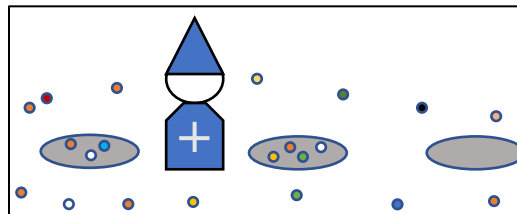
⁹ [Se sugiere promover el diálogo sobre esta situación, de modo que los niños y niñas digan si esto es correcto o no lo es. Se considera importante abordar valores morales y ética también.]

mensajero se dieron a la tarea de construir unas pequeñas tiendas de campaña, y elaboraron una fogata para pasar la oscura y fría noche. Al cantar el gallo, estos valientes enanitos y el mensajero se levantaron, comieron, cepillaron sus dientes, recogieron sus cosas y continuaron su travesía. Cuando llegaron a la entrada de la cueva el mensajero intervino:

—Hasta aquí los acompaño, mis valientes amigos. Hum... tengo muchas cosas que hacer— dijo con voz temblorosa.

—De acuerdo, no hay problema. Cuídate de regreso al reino— respondió Sus, amablemente.

En seguida de esa breve despedida, los enanitos se adentraron en la cueva. Al entrar, todos quedaron sorprendidos por la luz que emergía de una gran cantidad de piedras preciosas de diversos colores. Allí se encontraron con una gran habitación con gemas por todo el recinto, también había tres mesas de piedra. En la primera y en la segunda había piedras, diferente cantidad en cada una y la tercera mesa no tenía piedras.¹⁰



Divis decidió tomar estas brillantes piedras y salir de la cueva, pero al hacerlo una fuerza misteriosa las volvió a atraer a las mesas en las que estaban. Los cuatro enanitos quedaron desconcertados y con la intriga de cómo llevarlas al reino. Teniendo en cuenta que el rey Igual era un ser muy sabio, los enanitos decidieron pedirle amablemente su presencia en la cueva, comentándole sobre el misterio

¹⁰ [El docente puede hacer aquí una pausa especialmente para que los niños recreen la escena]

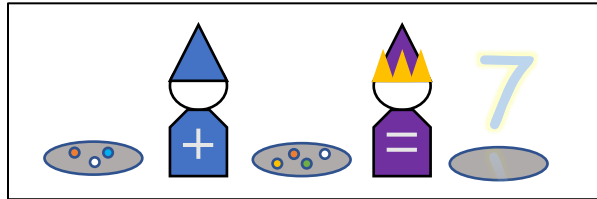
que los abrumaba. Cuando el rey Igual llegó, los enanitos le enseñaron al rey las piedras preciosas pero expresaron su preocupación al no poder retirarlas de las mesas y de la cueva en sí.

—*Bueno, estamos en un gran problema porque no se me ocurre qué hacer*— Dijo el rey Igual de preocupado.

—*Intentemos buscar alguna pista en esta cueva*— Añadió el rey, proponiendo una idea.

—*¡Enseguida, su majestad!*— Exclamaron los cuatro enanitos.

Los cuatro enanitos y el rey Igual empezaron a explorar la cueva en busca de alguna pista que les pudiese ayudar a saber qué hacer. Estos cinco personajes se encontraban moviéndose y caminando por toda la cueva. Cuando el rey Igual y Adi se ubicaron entre las mesas que estaban en la cueva, de repente, se iluminó aún más el recinto y sobre la tercera mesa apareció un extraño símbolo.¹¹



—*¡Adi, majestad, no se muevan!*— Exclamó Multi—*¿Qué acabaron de hacer?*— Añadió Sus.

—*No sabemos. Solo estábamos buscando bajo estas mesas si había algo útil*— contestaron Adi y el rey Igual.

—*¡DETÉNGANSE AHORA MISMO!*— Gritó una grave y fuerte voz.

¹¹ [El docente instruye a los niños y niñas a crear la situación, conforme la cantidad de piedritas que cada equipo haya ubicado en cada una de las mesas]

Los cuatro enanitos y el rey Igual quedaron atónitos y con la piel erizada de la intimidante voz proveniente de quién sabe qué parte de la cueva.

—¿Qu... qui...quién habla? — Preguntó Adi con la voz temblorosa y la garganta entrecortada.

— *YO SOY EL GUARDIÁN DE LOS TESOROS DE ESTA CUEVA. SI ESTAS PIEDRAS PRECIOSAS SE QUIEREN LLEVAR EL ACERTIJO DE ESTE RECINTO DEBEN DESCIFRAR. USTEDES ENANOS SON ESPECIALES, ESTO LO VAN A LOGRAR*— Volvió a sonar la estruendosa voz.

— *RECUERDEN, EL SÍMBOLO QUE BRILLA ANTE USTEDES PODRÁN UTILIZAR*— Añadió la voz.

Al escuchar estas últimas palabras, Adi tuvo una grandiosa idea. Ella empezó a hablar: — *Vamos a ver cuántas piedritas hay en las mesas. En esta mesa hay una, dos y tres piedras. En esta otra hay una, dos, tres y cuatro brillantes piedritas*— seguidamente Adi pidió a Multi reunir del suelo la misma cantidad de las piedras que contaron juntos. Las pusieron sobre la tercera mesa vacía. Después mencionó:

— *Contemos esta cantidad final, tenemos una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, ¡y siete piedras brillantes!*— Concluyó Adi mientras les explicaba al rey Igual y sus amigos, los enanitos, que al reunir dos cantidades diferentes se obtiene una cantidad final, y esta es mucho más que las otras dos cantidades.¹²

¹² [El docente, en este punto de la historia, puede motivar a los niños a *plantear diferentes sumas* como reunir colecciones de objetos, asociando estas cantidades con las tarjetas de los numerales que representen dicha cantidad, tal cual como Adi hizo en el cuento]



Un brillo encegució a nuestros queridos personajes de esta historia y al mismo tiempo ellos escucharon lo siguiente:

—*LO HAN CONSEGUIDO. UNO DE USTEDES HA VENCIDO LA PRIMERA PRUEBA, LA ADICIÓN. PUEDEN RETIRARSE CON SUS SIETE PIEDRAS PRECIOSAS*— Dijo la gran voz, mientras se desvanecía lentamente volviendo al silencio.

—*¡Qué bien, lo hemos logrado!*— Celebraron al tiempo los cuatro enanitos.

—*Mmm... Pero ¿para qué sirven estas piedras? ¿Solo emiten brillo?*— Se cuestionó Divis.

—*Tengo un recuerdo*— Contestó el rey Igual. —*Cuando era niño, mi padre me solía contar una leyenda sobre unas piedras mágicas que tenían poderes de provecho para todas las criaturas del mundo. Una piedra se sembraba y al instante brotaban grandes árboles con deliciosos frutos. Otra piedra, era lanzada al río, y los pescados empezaban a saltar a las redes de los pescadores. Y la última piedra, era capaz de convertir cualquier cosa que fuera tocada por esta, ¡en oro!*— Finalizó el rey Igual, con la ilusión y la esperanza que estas piedras tuviesen estos místicos poderes.

—*Esperemos que sí, majestad. Volvamos al reino para investigar estas “mágicas” piedras*— Dijo Multi, animando al rey Igual y a sus amigos los enanitos. —*Yo me ofrezco a llevar las piedras. ¡Yo soy el más fuerte de aquí!*— Dijo Sus, presumiendo sus grandes músculos y sacando una canasta en donde echar las piedras.

Los valientes enanitos, junto con el rey Igual, partieron camino hacia el reino de los números. Volvieron a atravesar por los verdes bosques para llegar a su destino. Pero en un abrir y cerrar de ojos, Sus se tropezó y cayó al suelo, dejando caer por todos los lados las tan custodiadas piedras brillantes. —*¡No puede ser!*— Exclamó Adi. —*¿Cómo puede ser tan descuidado?*— Añadió Sus, lamentándose por haber perdido las piedras.

—*Busquemos, cada uno y rápidamente, todas las piedras. Recuerden que al final debemos reagrupar siete piedritas en total*— Ordenó el rey Igual mientras se disponía a buscar entre los arbustos.

—*Aquí tengo dos*— Dijo Adi. —*¡Yo tengo otra!*— Gritó Multi. —*Yo encontré dos más*— Alardeó Divis. —*Nosotros no encontramos ninguna*— Dijo el rey Igual y el enanito Sus al mismo tiempo.

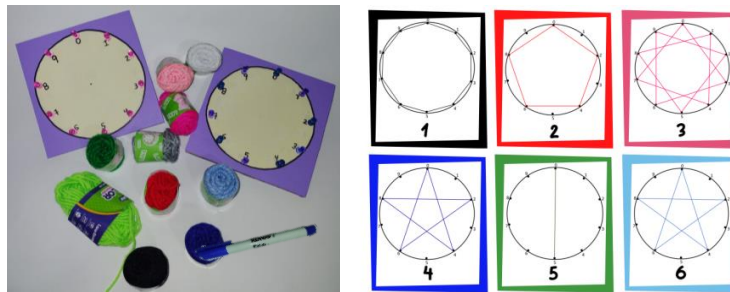
Los enanitos reunieron un total de cinco piedras al ponerlas de vuelta en el canasto que transportaba Sus. Pero se cuestionaban sobre las piedras que habían perdido. ¿Cuántas piedras no llegarían al reino? Se preguntaron los cuatro enanitos y el rey Igual.¹³ Los enanitos siguieron su camino al reino con las piedras que lograron recuperar. Allí confirmaron la magia de estos preciados objetos, con los cuales todos los habitantes del reino de los números sacaron provecho y se regocijaron por tal descubrimiento.

[La historia puede continuar, dejando volar la imaginación y creatividad del docente]

FIN

¹³ [El docente puede plantear la pregunta a cada equipo respecto a cuántas piedras se perdieron, dando las pistas de la cantidad que había inicialmente, a partir de la acción *perder*, *quitar* o *separar* una cantidad de otra.]

Kit círculo Waldorf



Kit círculo Waldorf. Fotografía del material elaborado por los autores.

Materiales para su elaboración:

- Superficie de cartón, cartón paja o madera.
- Pines o chinchas con cabeza plástica.
- Barra de silicona.
- Hilo o lana.

Tutorial para su elaboración: <https://www.youtube.com/watch?v=wQ5Rqgd5GbY>

Descargable para imprimir: <https://tinyurl.com/2efgdgsc>

En la pedagogía Waldorf es importante la exploración y el material tangible para el desarrollo de temáticas que no son tan claras a la luz de las palabras. Por esto se destaca el hecho de contar con materiales didácticos que estén al alcance de profesores para la enseñanza. El círculo Waldorf es uno de esos materiales didácticos, el más conocido, tal vez, que permite la exploración y experimentación de distintas temáticas como el conteo, algunas secuencias numéricas con números naturales, la multiplicación entre números naturales, entre otras asociadas al sistema

numérico de los números naturales representando a estos números con el sistema de numeración decimal.

Descripción del kit

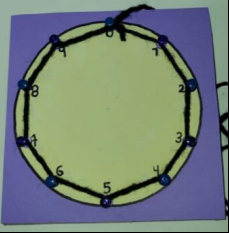
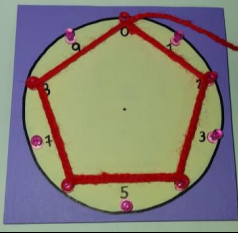
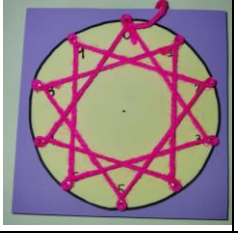

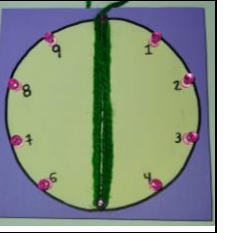

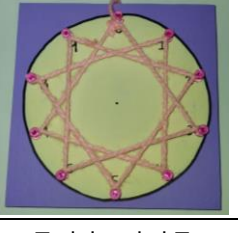
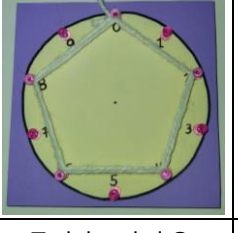
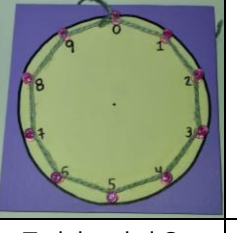
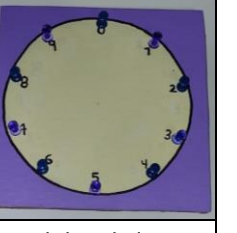
Este kit consta del círculo Waldorf, una circunferencia construida sobre una superficie plana de forma cuadrada. Sobre la circunferencia y en el interior del círculo que esta define se ubican, de manera equidistante, los números del cero al nueve en sentido de las manecillas del reloj. Se refiere a cada número como posición 0, posición 1, ... y posición 9 o simplemente se alude a estas posiciones por el número asignado, diez (10) tiras de lanas de metro y medio de longitud y de distintos colores, un paquete de tarjetas con la representación del círculo Waldorf y las tablas de multiplicar (11 dirigidas a estudiantes y 20 para el profesor) y un marcador borrable.



Círculo Waldorf. Fotografía del material elaborado por los autores.

En la posición 0 se encuentra amarrada una lana de color, cada color tiene la intención de representar una tabla de multiplicación que va a estar asociada a una figura que será el componente visual o la imagen con la que el estudiante asociará dicha tabla, estas imágenes hacen parte de un conjunto de tarjetas del kit (como

apoyo para el profesor o para los estudiantes). En la siguiente imagen se encuentran las tablas de multiplicación representadas con el círculo Waldorf:

				
Tabla del 1	Tabla del 2	Tabla del 3	Tabla del 4	Tabla del 5
Decágono	Pentágono	Estrella de 10 puntas	Estrella de 5 puntas	Segmento
				
Tabla del 6	Tabla del 7	Tabla del 8	Tabla del 9	Tabla del 10
Estrella de 5 puntas	Estrella de 10 puntas	Pentágono	Decágono	Punto en la posición 0

Presentamos a continuación una primera tarea que desarrolla cómo utilizar este material didáctico para la construcción de las tablas de multiplicación. Esta tarea que puede ser implementadas por el/la profesor/a en segundo o tercer grado de primaria.

Multipliquemos sumando: conteos y ritmos	
Material: Círculo Waldorf	
Requisitos	Verificar que los estudiantes: <ul style="list-style-type: none"> • Sepan contar al menos hasta 100. • Realicen conteos (de uno en uno, de dos en dos, etc.) iniciando en cualquier número. • Describan y resuelvan situaciones variadas con las operaciones de adición y sustracción.

Objetivos o meta	Reconocer la relación entre la multiplicación y la adición, entendiéndola multiplicación con uno de sus significados, como una suma repetitiva o iterada del mismo sumando.		
Correspondencia con la pedagogía Waldorf	<ul style="list-style-type: none"> • Exploración de procesos de conteo para evaluar la pertinencia del uso en distintas situaciones en las que se enfrente el estudiante académicamente o en su cotidianidad. • Enseñanza de operaciones básicas al mismo tiempo (adición y multiplicación). • Construcción de significado para el proceso de la multiplicación a partir de la vivencia. 	Estándar(es) básico(s) de competencias matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> • Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de) en diferentes contextos. • Comprender situaciones que impliquen multiplicar y el agrupamiento de objetos iguales. • Justifico regularidades y propiedades de los números.
		Aspectos del pensamiento numérico	Hacer cálculos y conteos con fluidez.
		Contenido(s) del pensamiento numérico asociado(s) a la tarea	Multiplicación entre números naturales. Realizar cálculos con fluidez.
Utilidad	Co-instruccional	Posible grado escolar	2º-3º
		Septenio	2 (de 7 años -14 años)
Asuntos matemáticos relacionados al contenido del	Las expresiones como “escribir tres veces el cinco y sumar” o “escribir dos veces el cuatro y sumar” se relacionan con uno de los procesos realizados en la multiplicación que son las adiciones repetidas con el mismo sumando. Con el círculo		

<p>pensamiento numérico y sistemas numéricos</p>	<p>Waldorf es posible que los estudiantes desarrollen el aprendizaje de la multiplicación de forma agradable por medio de actividades como la exploración y visualización, de forma grupal o individual.</p> <p>Un significado de la multiplicación entre números naturales es entenderla como una forma abreviada de expresar una adición de sumandos iguales; por ejemplo: $6 + 6 + 6 + 6 = 6 \times 4 = 24$. Los números que se multiplican se llaman factores y el resultado se denomina producto.</p> <p>Otro significado de la multiplicación son las secuencias numéricas de las cifras de las unidades de los resultados de los conteos; ejemplo: Conteos de 2 en 2: 0, 2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, 6, 8, ... Que corresponden con las cifras de las unidades de los productos de la tabla del 2.</p>
<p>Proceso por desarrollar atendiendo a la pedagogía Waldorf</p>	<p>A partir de la manipulación del kit círculo Waldorf se pretende que los estudiantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Construyan las tablas de multiplicación para su aprendizaje posterior a través de conteos como lo es de uno en uno (tabla del uno) y de manera sucesiva hasta de nueve en nueve (tabla del nueve). • Establecer una relación entre la tabla de multiplicación y la imagen generada al completar la secuencia numérica con el círculo Waldorf a partir la exploración y la vivencia.

Secuencia de enseñanza: construcción de las tablas de multiplicar

Antes de dar inicio con la implementación de esta tarea, se hace necesario realizar una exploración en compañía de los estudiantes de forma rítmica. Esta exploración tiene la finalidad de familiarizar a los estudiantes con conteos de secuencias numéricas a partir de movimientos corporales (manos y pies). El conteo debe ser fluido verbalmente y la secuencia marcada con ayuda de los movimientos haciendo distinción unos con otros.

1. El profesor debe dar la instrucción de dejar el puesto libre para realizar un ejercicio de esparcimiento antes de dar inicio con la clase (esto puede ser modificado según la creatividad de cada profesor ya que también se puede realizar de pie ubicados en círculo). Les explicará que van a realizar un juego de golpe con las manos, pero recitando los números sin parar como el siguiente ejemplo:

Para la secuencia numérica de tres en tres, se debe: cantar “uno”, “dos” acompañados de golpes de palmas contra el puesto de los estudiantes y al cantar “tres” se da una palmada con las dos manos, se continúa cantando “cuatro”, “cinco” con golpe de palmas contra el puesto y al cantar “seis” se da una palmada con las dos manos de nuevo. Se continúa el anterior proceso de conteo cantando hasta que lo desee el profesor, teniendo en cuenta que es un movimiento o sonido tenue sobre el conteo practicado en este caso de tres en tres.

No olvidar que los números se deben decir sin hacer pausas ya que al recitar cada uno va a estar acompañado de un movimiento de los descritos. (los movimientos pueden variar por gusto del profesor teniendo en cuenta que se repitan dentro de la secuencia numérica)

Dar continuidad a la exploración rítmica con distintas secuencias numéricas añadiendo otros movimientos.

2. Posterior a la exploración rítmica de secuencias numéricas el profesor debe organizar a los estudiantes de forma individual o grupal según la disponibilidad del kit o los intereses del docente.
3. Cuando cada estudiante o grupo de estudiantes disponga del material: kit círculo Waldorf, el/la profesor/a, junto con los estudiantes, describirá el círculo Waldorf. En seguida el profesor enseñará cómo usar el círculo Waldorf. (Anexo 1)
4. Posterior al uso del círculo Waldorf el profesor indicará a los estudiantes cómo usar las tarjetas tipo 1. (Anexo 2). Luego de la exploración con las tarjetas tipo 1, el profesor dará a conocer las tarjetas tipo 2 para dar la construcción de las tablas de multiplicar. (Anexo 3)
5. Para finalizar, el profesor puede preguntar a los estudiantes sobre la actividad, qué tal les pareció e institucionalizando las tablas de multiplicar. Además, recordarles a los estudiantes que las tarjetas de tipo 2 les quedarán para repasar las tablas para su posterior memorización o uso, mientras las aprenden.
6. Preguntas y/o indicaciones que pueden realizar los profesores como apoyo al desarrollo de la tarea:
 - ¿Qué pasa si me salto un número al contar?, se espera que noten el cambio en las figuras ya que no se visualizarán de forma “armónica”. Ejemplo, si la

figura resultante debes ser una estrella, al saltarse el patrón por error va a modificar dicha figura.

- ¿Cómo se altera mi material si hago mal una adición? Se espera que los estudiantes aludan a que no se ve una guía en la forma de llevar la lana.
- Cuando los estudiantes terminen uno de los conteos, permitir que exploren por disposición propia con otros números de tal forma que les permita reportar inquietudes o anotar aspectos relevantes como la repetición de imágenes en el resultado de algunas tablas de multiplicación.

<p>Otras ideas para inspirar a profesores</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Comprender el concepto de “ser múltiplo de” según el conteo que desee realizar el docente con los estudiantes con ayuda del círculo Waldorf. 2. El profesor puede ampliar y hacer más llamativa la tarea y la manipulación del material creando un cuento asociado al círculo Waldorf en la que relate su uso (realizar transversalización con el área de español para apoyar distintos procesos). 3. Explorar sobre propiedades de los polígonos que se forman al realizar las tablas de multiplicación en el círculo Waldorf. 4. Trabajar sucesiones numéricas (números cuadrados, cúbicos, etc), y observar regularidades o patrones con las figuras formadas en el círculo Waldorf.
--	---

Anexos

Anexo 1. Explicación uso círculo Waldorf

Los siguientes ejemplos son una descripción de cómo se puede presentar el círculo Waldorf a un grupo de estudiantes para que comprendan el proceso que deben realizar para hacer el estudio de las tablas de multiplicación.

El estudiante o persona que esté utilizando el material realiza conteos, iniciando de uno en uno, luego de dos en dos, y así sucesivamente, utilizando las lanas de colores como se ve en la tabla de la *descripción del kit*, es decir, a cada tabla de multiplicar le corresponde un color específico de lana. Al tomar el color del conteo

a realizar y ponerlo en la posición 0 va dando un giro con la lana en la posición correspondiente con el fin de que la lana quede firme. Por ejemplo, si se realiza el conteo de dos en dos entonces debe dar un giro al pasar por la posición 2 con ayuda de la lana, luego en la posición 4 y así sucesivamente, aquí se explica este proceso.

Para el conteo de la tabla del uno se puede realizar mediante sumas como $0 + 1 = 1$ y $1 + 1 = 2$ o conteos de uno en uno. Con cualquiera de las dos opciones, de manera conjunta al conteo se va a ir dando un giro en la posición correspondiente en el círculo Waldorf; se repite el ejercicio con la continuidad del conteo y dando giro con la lana en las posiciones siguientes. El anterior proceso será realizado sucesivamente hasta llegar a la última posición que estaría indicada por la finalización de la tabla de multiplicar de forma usual, pero en ese momento de la explicación no se va a aludir a la multiplicación. El conteo se dirige hasta donde lo disponga el/la profesor/a continuando con el conteo se llegaría a 10 que corresponde a $10 \times 1 = 10$, que se representa anudando la lana en la posición 0, porque se elige la cifra de las unidades. El estudiante va a relacionar la tabla de multiplicación del uno o el conteo de uno en uno con un decágono. Así:

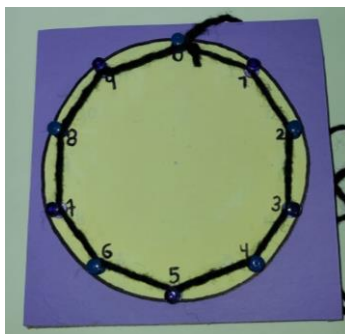


Tabla del 1. Fotografía del material elaborado por los autores.

Ahora veamos el ejemplo de conteo de 2 en 2 con la tabla del 2.

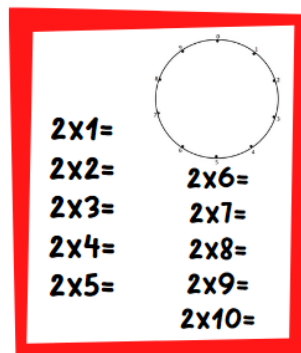
Anexo 2. Uso de la tarjeta tipo 1

En el documento para descarga de las tarjetas que hacen parte del kit del círculo Waldorf (<https://tinyurl.com/2efgdgsc>) se encuentra la tarjeta de tipo 1, en estas se puede observar el círculo Waldorf completamente vacío, con el fin de que los estudiantes mediante la instrucción del profesor puedan replicar las figuras exploradas con el círculo Waldorf físico, con ayuda de una regla y un marcador o simplemente con el pulso del estudiante. El objetivo de este tipo de tarjetas es que, sin necesidad de que el estudiante tenga que manipular el material, pueda realizar las tablas de multiplicar a partir del conteo mental, como se explicó en el Anexo 1.

Anexo 3. Uso de la tarjeta tipo 2

Al terminar con la exploración de las tarjetas tipo 1, el profesor dispondrá para cada uno o por los grupos de trabajo las tarjetas tipo 2. Se recomienda que este uso sea de forma individual puesto que es un material que puede utilizarse como refuerzo (post – instruccional) del aprendizaje de las tablas de multiplicación.

Estas tarjetas tienen un círculo Waldorf en blanco y las tablas de multiplicación para completar su resultado como se muestra enseguida:



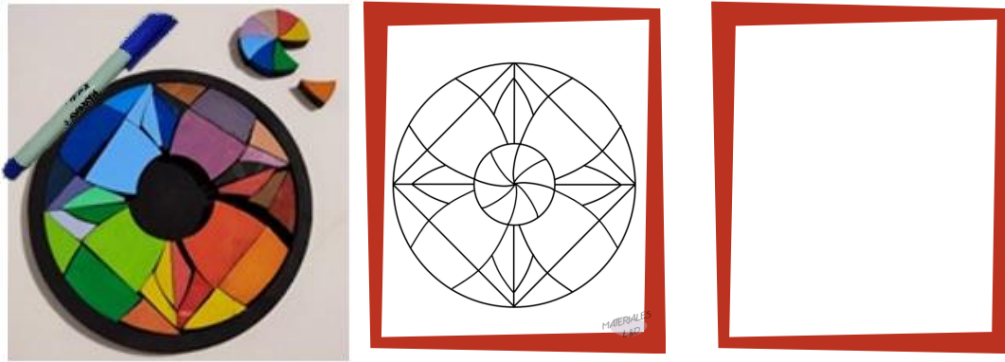
Tarjeta tabla del 2. Imagen del material realizado por los autores

Por indicación del profesor con la tarjeta de la tabla del 1 les mostrará a los estudiantes que con ayuda de un lápiz van a aludir a que el resultado de cada posición que tomen con la lana corresponderá con el resultado de la tabla de

multiplicación de forma sucesiva; es decir, en la posición 1 va a ser 1 el resultado de la primera multiplicación de la tarjeta, en la posición 2 el 2 va ser el resultado de la segunda multiplicación de la tarjeta y así sucesivamente con todas las multiplicaciones.

El profesor dará la instrucción a los estudiantes que deben repetir el proceso con las demás tarjetas de forma individual o grupal. De la anterior forma los estudiantes van a aludir a las figuras resultantes con una tabla de multiplicación particular.

Kit mandala Waldorf



Kit mandala Waldorf. Fotografía y diseños del material elaborado por los autores.

Materiales para su elaboración:

- Base circular de cartón paja.
- Papel foami de colores.

Descargable para imprimir: <https://tinyurl.com/2ofcfsrp>

En la pedagogía Waldorf se busca que la enseñanza no se reduzca solo a la presentación de contenidos matemáticos abstractos y su posterior memorización, sino que es importante que los estudiantes tengan la posibilidad de explorar e interactuar con material tangible que pueda dejar en ellos registros visuales con el que los contenidos matemáticos abordados puedan ser asociados a estos. En esta pedagogía hay relevancia a la vivencia del estudiante sobre la conceptualización.

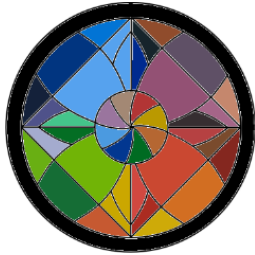
Descripción del kit

Este kit, consta de la mandala Waldorf, que es un artefacto similar a un rompecabezas, trae 40 piezas de diferentes colores, formas y tamaños. Puede ser

utilizado para construir la figura original de mandala o pueden ser construidas formas artísticas y simétricas. Por otro lado, este kit viene con un paquete de tarjetas laminadas de dos tipos: el primer tipo de tarjetas tiene el croquis de la mandala Waldorf para ser coloreado con marcador borrable. Con el segundo tipo de tarjetas se tiene la intención de representar la fracción de números enteros como parte todo de un total de partes determinando. Teniendo en cuenta la fracción interpretada como parte todo, en la que la fracción representa la relación entre una parte (número de elementos tomados –cantidad de fichas tomadas de la mandala, menor a la unidad–) y el todo (número total de elementos –cantidad de fichas tomadas como unidad–).

Interpretación de fracción como parte-todo (dividiendo la unidad con respecto a la cantidad de partes que la componen) con la "Fracdala"			
Material: Mandala Waldorf			
Requisitos	Verificar que los estudiantes: <ul style="list-style-type: none"> • Sepan contar. • Utilicen números naturales en distintos contextos para expresar conteos. 		
Objetivos o meta	Comprender la interpretación de fracción como razón.		
Correspondencia con la pedagogía Waldorf	<ul style="list-style-type: none"> • Exploración. • Creatividad. • Construir figuras artísticas con el material manipulativo. • Aprendizaje mediante 	Estándar(es) básico(s) de competencias matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> • Interpreto las fracciones en diferentes contextos relaciones parte todo como conjunto de elementos de la unidad.

	registros visuales.	Aspectos del pensamiento numérico	<ul style="list-style-type: none"> • Comprensión del significado de los números. • Comprensión del significado de las operaciones y sus relaciones.
		Contenido(s) del pensamiento numérico asociado(s) a la tarea	Noción de fracción a partir de la interpretación como parte todo (respecto a la cantidad de elementos que conforman la unidad establecida).
Utilidad	Co-instruccional	Posible grado escolar	5° - 6°
		Septenio	2 (8 años -14 años)
Asuntos matemáticos relacionados con el tema del pensamiento numérico y sistemas numéricos	<p>La interpretación de las fracciones como relación parte-todo se produce cuando un todo (continuo o discreto) se divide en partes iguales (refiriéndose a la cantidad de partes que conforma la unidad establecida). La fracción (propia), en esta interpretación, indica la relación existente entre el todo, que recibe el nombre de unidad, y el número de partes que se consideran de dicha unidad.</p> <p>En un principio se presenta la <i>Fracdala</i> con sus 40 piezas como el total de partes, de modo que las fracciones trabajadas sean interpretadas como parte-todo en la que se compare cierta cantidad de piezas tomadas de un total de 40. Seguidamente, pueden ser trabajadas otras fracciones con denominador diferente a 40.</p> <p>Se pretende que los estudiantes asocien las representaciones de fracciones con imágenes de figuras artísticas que puedan construir con diferentes cantidades de las fichas de la <i>Fracdala</i>.</p>		

<p>Proceso por desarrollar atendiendo a la pedagogía Waldorf</p>	<p>Se pretende con la manipulación de la mandala que los estudiantes puedan:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identificar el concepto de unidad como el <i>todo en cuanto al número de partes que conforma la unidad</i>. • La unidad puede cambiar respecto a la cantidad de partes de las que esté conformada. Por ejemplo: • Toda la mandala puede ser vista como el todo, compuesta por 40 piezas. Sin embargo, el círculo central puede ser visto como <i>otra unidad</i> formada por 8 piezas. La cantidad de dos piezas puede ser representada por $2/8$.
<p>Secuencia de enseñanza: significado de número fraccionario</p>	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Organizar el grupo de estudiantes en parejas¹⁴ con el material para cada equipo: <ul style="list-style-type: none"> • Fracdala desarmada (con las piezas desorganizadas, fuera de la base). • Tarjetas para colorear 2. Indicar a los estudiantes armar la fracdala. Puede ser de ayuda compartirle una imagen guía para los equipos por si es su primera vez interactuando con el material. Simultáneamente, mientras cada pareja de estudiantes arma la fracdala en su base, el docente encargado puede preguntar las características de las fichas de las que este material está compuesto. <ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuántas fichas son en total? • ¿Hay fichas con características en común? • ¿Hay fichas con la misma forma y mismo tamaño?, ¿cuántas? <div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: center;">Mandala Waldorf. Guía con colores elaborado por los autores.</p> 3. Para las preguntas planteadas en el ítem anterior, cada equipo puede elaborar en su cuaderno, un registro de la cantidad de figuras según su forma. Dejar a la 	

¹⁴ El profesor puede involucrar a cada estudiante en el desarrollo de la tarea de forma individual y reunir en parejas para discutir las conjeturas o resultados que cada uno produzca.

creatividad de cada equipo cómo presentar esta información. Sin embargo, se muestra a continuación una tabla como ejemplo para guía del profesor:

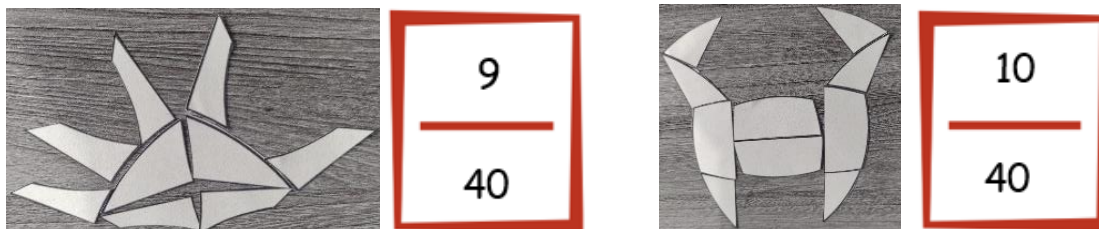
Tipo de ficha						
Cantidad de fichas	8	4	4	8	8	8

- El profesor encargado puede generar diálogo entre los estudiantes para trabajar también procesos de visualización, preguntando cuáles figuras pueden reconocer cuando la *Fracdala* esté completa en su base. Esto se plantea con el objetivo de que los estudiantes reconozcan otras formas que más adelante pueden ser utilizadas como nuevas unidades y así abordar fracciones con otros denominadores. Como por ejemplo las siguientes formas, con diferentes cantidades de fichas pueden ser utilizadas como unidades diferentes.

Ejemplos de unidad				
Cantidad de fichas (Denominador)	40	8	16	28

- Luego, el docente puede indicar a los estudiantes sacar sus paquetes de tarjetas y puede solicitar que ellos las describan y preguntar para qué podrían servir estas tarjetas. La idea es que los estudiantes propongan el trabajo, puede dar pistas para encaminarlos a proponer colorear y escribir con los marcadores borrables sobre las tarjetas.
- El profesor dispondrá de sus tarjetas y explicará el uso de estas para que los estudiantes coloreen en ellas las fichas que extraigan de la base y representen con numerales, en la tarjeta correspondiente, esa cantidad extraída sobre la cantidad total de fichas que conforman la unidad sobre la cual se esté trabajando. (Anexo 1)
Paralelamente los estudiantes pueden ir registrando estas figuras y los resultados que van obteniendo en sus cuadernos, de modo que, luego de explorar y abordar diferentes dibujos se explique una fracción como razón a partir de la cantidad de fichas tomadas como el todo, explicando cuál es el numerador y cuál el denominador; en este caso el denominador es el todo de la cantidad de fichas tomadas.

7. Como trabajo adicional, el profesor puede motivar a los estudiantes a construir otras figuras y formas artísticas con las fichas, y teniendo en cuenta el todo considerado, establecer un asocio de esta representación física y artística con la representación simbólica como fracción y la interpretación de la fracción como razón. Como ejemplos se presentan las siguientes formas:



Otras ideas para inspirar a profesores

1. Abordaje de fracciones equivalentes.
2. Adición y sustracción de fracciones homogéneas.
3. Hacer un trabajo “*análogo*” al planeado en esta tarea con fracciones desde su representación figural continua (relacionando las fracciones con la superficie o área de las fichas) mediante la implementación de distintas mandalas que logren dar cabida a esta representación.
4. Vincular procesos de estimación de área de cada figura.

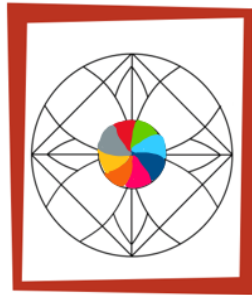
Anexos

Anexo. Uso de las tarjetas

En la presentación del Kit mandala Waldorf, encontrará un imprimible de las tarjetas (<https://tinyurl.com/2ofcfsrp>), las cuales podrá laminar con papel adhesivo transparente con el objetivo de que puedan ser rayadas con marcador borrable por los estudiantes o por quien esté interesado en hacer uso de este material.

En este imprimible encontrará dos tipos de tarjeta, uno de ellos tiene el croquis en blanco y negro de la mandala Waldorf cuya finalidad es colorear sobre ella las

figuras o fichas que se vayan extrayendo de la base de la mandala, o bien, se dejen estas en la mandala.



Simultáneamente, se hará uso de la tarjeta del otro tipo, con la cual se representará la fracción asociada a la figura coloreada. Por ejemplo, según la figura anterior, se pintaron 8 fichas. Si se trabaja como unidad toda la mandala (las 40 fichas), la fracción asociada a este registro visual es $8/40$, interpretando aquí la fracción como razón: 8 fichas que conforman el centro de la mandala, respecto a 40 fichas en total.

$$\frac{8}{40}$$

Kit arcoíris Waldorf



Kit arcoíris Waldorf. Material elaborado por los autores.

Materiales para su elaboración:

- Superficie de cartón, cartón paja o madera.
- Silicona caliente y pistola.
- Papel periódico.
- Colbón.
- Lana o hilos para medir.

Tutorial para su elaboración: <https://www.youtube.com/watch?v=Axajw4Ezmx4>

Descargable para imprimir: <https://tinyurl.com/2j7ucjbg>

El arcoíris Waldorf es un material didáctico que permite la creación libre a los estudiantes y el máximo desarrollo de su imaginación y creatividad. Además, como se trata de un artefacto de construcción y de manipulación, ayuda a mejorar la concentración, el razonamiento, la coordinación de movimientos, la coordinación mano-ojo, el desarrollo de la psicomotricidad fina y de la organización espacial.

Este material puede favorecer el aprendizaje de conceptos matemáticos como las diferentes medidas, las simetrías, las seriaciones, etc.; así como el aprendizaje de vocabulario referente a los colores y los tamaños. Sin embargo, en esta ocasión el arcoíris Waldorf será utilizado para introducir uno de los números irracionales que muestra la relación entre el diámetro y el perímetro de una circunferencia.

Descripción del kit

El kit arcoíris Waldorf consta de un conjunto de siete (7) arcos de cartón o madera con los colores principales en los que se descompone la luz (morado, azul, celeste, verde, amarillo, naranja y rojo). Adicionalmente este kit, para el propósito de la siguiente tarea, trae un paquete de lanas de colores que se corresponden con los mismos del arcoíris. La finalidad de estas lanas es poder recortar trozos cuyas longitudes sean, aproximadamente, la longitud de cada semicircunferencia y los diámetros de cada una de las piezas.

Aproximando a π a través de números racionales con el arcoíris Waldorf	
Material: Arcoíris Waldorf	
Requisitos	Verificar que los estudiantes: <ul style="list-style-type: none"> • Sepan medir. • Utilicen los números decimales en su notación decimal para expresar longitudes. • Identifiquen el diámetro y radio de una circunferencia, y longitud de un arco.

Objetivos o meta	Comprender la noción de los números irracionales como decimales infinitos no periódicos.		
Correspondencia con la pedagogía Waldorf	<ul style="list-style-type: none"> • Exploración. • Construcción de significados numéricos a partir de la manipulación de objetos. • Aprendizaje de conceptos abstractos mediante el contacto directo de material concreto. 	Estándar(es) básico(s) de competencias matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> • Construye varias representaciones (geométrica, decimales o no decimales) de un mismo número racional o irracional. • Utiliza las propiedades de los números reales para justificar procedimientos y diferentes representaciones de subconjuntos de ellos.
		Aspectos del pensamiento numérico	<ul style="list-style-type: none"> • Significado de los números y sus relaciones entre ellos. • Hacer cálculos con fluidez y estimaciones razonables.
		Contenido(s) del pensamiento numérico asociado(s) a la tarea	Aproximación al número π mediante números racionales cercanos a 3,14. Aproximaciones.
Utilidad	Pre-instruccional	Posible grado escolar	8° - 11°
		Septenio	2 y 3 (de 8 a 18 años)
Asuntos matemáticos relacionados con el tema del pensamiento	Dentro del conjunto de los números reales (\mathbb{R}), existen dos subconjuntos que son disjuntos (su intersección es vacía). Estos dos subconjuntos son los números irracionales \mathbb{I} y el subconjunto de los números racionales \mathbb{Q} .		

<p>numérico y sistemas numéricos</p>	<p>En el conjunto de los números irracionales, los números más conocidos son $\sqrt{2}$, φ (phi) y π (pi). Es importante mencionar que es posible acceder a algunos números irracionales mediante su representación algebraica o mediante aproximaciones decimales.</p> <p>Por su parte, π es la letra que representa la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro. Sin embargo, en este trabajo es necesario recalcar que, al trabajar con semicircunferencias se procederá a calcular un número cuyo doble del cociente o razón nos da un valor aproximado al número pi mediante números racionales cercanos a 3,14.</p>
<p>Proceso por desarrollar atendiendo a la pedagogía Waldorf</p>	<p>Se pretende que, a partir de la manipulación del arcoíris Waldorf los estudiantes puedan notar que, independientemente del tamaño de cada arco (perímetros, radios y diámetros diferentes), el doble del cociente entre el perímetro y el diámetro se va a aproximar, a través de números racionales, al número π.</p>
<p align="center">Secuencia de enseñanza: Aproximación al número π a través de números racionales con el arcoíris Waldorf</p>	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Organizar a los estudiantes de forma individual o grupal según la disponibilidad del kit o los intereses del docente, además, se les pedirá tijeras, regla y calculadora como complemento a la actividad. 2. El profesor describirá el material con ayuda de los estudiantes. 3. Posteriormente el profesor dará las indicaciones (ver Anexo 1) para realizar el proceso de medición del material a los estudiantes. 4. El profesor finalizará con un diálogo con los estudiantes comentando sobre cómo les pareció la actividad y que, si ellos esperaban los resultados obtenidos, para posteriormente institucionalizar el número π como un elemento del conjunto de los números irracionales y como la razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro. Posteriormente, el profesor procederá a realizar el desarrollo del objeto “números irracionales” de acuerdo con su línea matemática y didáctica. 	

<p>Otras ideas para inspirar a profesores</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Utilizar el arcoíris Waldorf para adquirir nociones de clasificación (colores, tamaños) y comparación (es más grande que / es más pequeña que) en el primer septenio (hasta los 4 años). 2. Compara y ordena objetos de acuerdo con atributos como altura, peso, intensidades de color, entre otros (para los más pequeños). 3. Ejemplos de exploraciones para hallar números irracionales: https://es.wikihow.com/calcular-Pi
--	--




Anexos

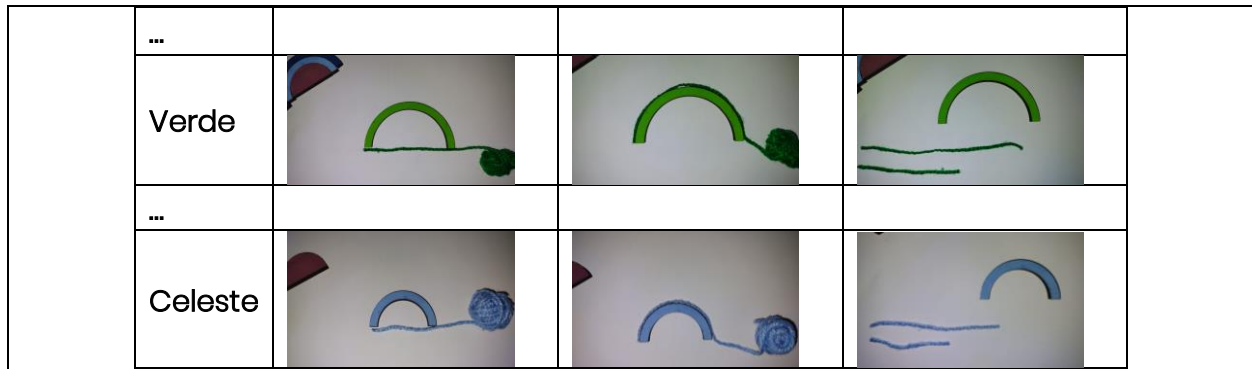
Anexo 1. Proceso de medición y exploración.

Esta propuesta de exploración se encontró viable y algo distinta a las convencionales con ayuda del arcoíris Waldorf puesto que puede ser tomado como ventaja utilizar el perímetro de la semicircunferencia de cada arco y el diámetro de cada uno de estos para mostrar la relación que conlleva establecer un cociente y así determinar un número aproximado al número π mediante la iteración de un proceso de medición y estimación de medidas.






El profesor con ayuda de una presentación en el tablero o con ayuda de alguna herramienta digital, o explicando con sus propias palabras, les mostrará a los estudiantes con el fin de explorar el material las siguientes indicaciones:

1. Mide el arco externo y el diámetro de los arcos de color rojo, naranja, amarillo, verde, azul, celeste y morado con ayuda de las lanas y recorta estas en la medida que te de cada una de las piezas. Se espera que los estudiantes realicen el siguiente proceso:

Arco	Proceso de medición del diámetro	Proceso de medición del borde o arco	Corte de las lanas con la medida del diámetro y arco
Rojo			








2. Posterior al proceso anterior, se les pedirá a los estudiantes que realicen la medición de cada una de las lanas con ayuda de una regla y reporten los datos obtenidos en el cuaderno. (Se les puede indicar que realicen una tabla con tres columnas, una que indique el color del arco, otra el valor en centímetros del arco y otra con el valor en centímetros de diámetro).

Arco					
Medida del borde externo	28,2 cm	25 cm	22 cm	18,9 cm	15,7 cm
Longitud del diámetro (D)	18 cm	16 cm	14 cm	12 cm	10 Cm

3. Después de que los estudiantes obtengan los valores numéricos solicitados, el profesor les indicará que deben continuar completando la tabla con columnas mediante la interpretación que analizan en el cambio de dimensión de cada medida; por ejemplo, analizar el cambio en las medidas de los arcos uno a uno y sus diámetros. Además, deben añadir dos filas más a la tabla para hallar el

cociente entre la medida del borde externo y la longitud del diámetro, y también el doble del cociente descrito, como se muestra a continuación:

Arco							
Medida del borde externo (P)	28,2 cm	25 cm	22 cm	18,9 cm	15,7 cm	12,8 cm	...
Longitud del diámetro (D)	18 cm	16 cm	14 cm	12 cm	10 cm	8 cm	...
P/D	$1,5\bar{6}$	1,5625	$1,57142\bar{8}$	1,575	1,57		
$2 \times (P/D)$	$3,1\bar{3}$	3,125	$3,14285\bar{7}$	3,15	3,14		

- Luego de completar las nuevas filas, el profesor les va a pedir a los estudiantes, que planteen una conjetura a partir de los resultados hallados en la tabla anterior. (con el fin de favorecer el proceso de generalización)
- El profesor dará un espacio para que los estudiantes traten de plantear alguna conjetura, luego les ayudará a plantear la conjetura: *“El doble del cociente entre la longitud de cualquier semicircunferencia del arcoíris Waldorf y el diámetro de esta es aproximadamente 3,14.”*
- Posteriormente, les ayudará a representar esta conjetura con el uso de expresiones simbólico-algebraicas (se recomienda manejar expresiones que ya estén en el vocabulario de los estudiantes o hacer el ajuste correspondiente si es pertinente) para llegar a que el cociente entre la longitud de una circunferencia cualquiera y su diámetro es aproximadamente **3,14 ...**

El profesor puede aludir a que el proceso realizado funciona para hacer una aproximación al número pi mediante los números racionales pero que esta, no

es la única forma; ya que, desde la historia se puede aludir a distintas aproximaciones e distintas épocas como: los babilonios descubrieron que $\frac{25}{8} < \pi < \frac{22}{7}$, más adelante en el Papiro de Rhind que $\pi \approx \frac{256}{81}$, posteriormente Arquímedes encontró mediante la fracción $\frac{22}{7}$ una relación para aproximar los valores superiores e inferiores a π . Continuando así, el profesor puede aludir que mediante la exploración se llegaron a valores similares en algunas de las razones estudiadas al completar la tabla y que en ese caso solo se está haciendo una aproximación racional a π , y con lo cual, el número determinado es una aproximación a un número o números cercanos al conocido como π "pi", seguidamente puede introducir este como un elemento del conjunto de los números irracionales.

7. Con el anterior proceso el profesor ya puede enfatizar que π es un número irracional mostrando parte de su historia, cómo aun en día continúan encontrando nuevos dígitos y por lo tanto no tiene expresión decimal finita (con un video o con el método que le parezca más conveniente). Y explicar que esta es solo una aproximación. Un ejemplo de video es el siguiente (<https://www.youtube.com/watch?v=d1d4g0TcJUY>) teniendo en cuenta que en internet hay variedad de ejemplos.

Capítulo V. Conclusiones

En este apartado registramos algunas de las reflexiones respecto a los aprendizajes que nos dejó la elaboración de este trabajo de grado. Además, dejamos algunas cuestiones abiertas y recomendaciones para el desarrollo de futuras investigaciones en el campo de la educación matemática relacionadas con la pedagogía Waldorf, el uso de materiales didácticos y el desarrollo del pensamiento numérico.

Del objetivo general de este trabajo (Compartir tareas para la enseñanza de algunos tópicos del pensamiento numérico y sistemas numéricos que involucren material didáctico manipulativo basado en la pedagogía Waldorf, que apoyen la comprensión del significado de los números, las operaciones y sus relaciones):

- Logramos diseñar cuatro tareas, cada una con un enfoque distinto, pensadas a partir de los asuntos generales del pensamiento numérico y los sistemas numéricos. En unas podemos apreciar el uso y significado de los números en dos contextos distintos como contar para sumar, multiplicar, hacer aproximaciones y relaciones; además, dejando esbozadas las ideas para dar continuidad con operaciones como la sustracción y división.
- Con la elaboración de la cartilla logramos enriquecer nuestra postura sobre la importancia de los materiales manipulativos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, de manera tal que, incluso, esta postura fuera lo suficientemente visible; tanto así que quienes colaboraron con la validación de la cartilla resaltaron la importancia del uso de estos en el aula de clases.
- Gracias a las respuestas de los participantes en la validación de las tareas propuestas, nos permitimos decir que los materiales didácticos propuestos en el marco de la

pedagogía Waldorf tienen algunos limitantes en cuanto a su construcción, y es posible que se presenten algunas dificultades a las que se puede hacer frente con una buena preparación conceptual del contenido a trabajar.

- Consideramos que es claro el procedimiento propuesto para el desarrollo de las tareas con el fin de cumplir con los objetivos planteados.
- Haciendo un análisis de las respuestas de los participantes se genera un cuestionamiento de nuestra parte: ¿Cuáles posibles desventajas se evidencian respecto a la propuesta de las tareas y los materiales utilizados con la finalidad de apuntar a una mejora y llevar a cabo una implementación exitosa de las mismas?

En la construcción de los antecedentes identificamos gran variedad de materiales didácticos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas enfocados en primaria. Por eso vimos la necesidad de plantear por lo menos dos tareas que se pudieran desarrollar con ayuda de material didáctico en la educación secundaria enfocadas desde la exploración de estos. Según lo aprendido en la elaboración de este trabajo de grado y en nuestra formación académica, es normal que en la enseñanza de algunos contenidos no sea tan notoria la presencia de la pedagogía Waldorf porque no hacen uso de material tangible, pero sí realizan un proceso exploratorio en el que los estudiantes son constructores de su propio conocimiento y los maestros son guías para encaminarlos.

Además de esto, también con los antecedentes, logramos dar inicio a la identificación de los aspectos relevantes de la pedagogía Waldorf como lo son la conexión entre el material tangible y los temas teóricos para un mejor proceso de aprendizaje, el uso de los movimientos corporales y la narración para conectar con los saberes. Los elementos anteriores también se evidenciaron en algunos de los trabajos examinados, los cuales apoyan la relación que quisimos

hacer, desde un principio, entre el pensamiento numérico y los sistemas numéricos; por ejemplo, con el uso de la narración y la construcción de material tangible para potenciar el aprendizaje de lo mencionado.

Fue muy importante el apoyo de la profesora Sandra Morales (quien nos permitió entrevistarla) en la escritura del marco de referencia, ya que con la bibliografía consultada logramos recopilar información relativa a la historia de la pedagogía Waldorf, sus características, sus objetivos y los procesos que se buscan desarrollar en los estudiantes, pero no encontramos aspectos tan específicos como la estructuración de los contenidos en las instituciones Waldorf, y otros asuntos particulares que fueron narrados por ella desde su vivencia como maestra en esta pedagogía. La entrevista realizada nos permitió entender cómo es el desarrollo de la secuencia de contenidos, de modo que pudimos dilucidar mejor las fases de enseñanza de la pedagogía Waldorf.

Dado que también indagamos ampliamente sobre el pensamiento numérico y sistemas numéricos, nos llevamos aprendizajes con mayor profundidad respecto a cuáles son los componentes y procesos con los que se potencia el desarrollo de este tipo de pensamiento matemático. De este modo, concluimos que entre los saberes de un profesor de matemáticas debe haber un nivel alto de conocimiento sobre cada uno de los pensamientos matemáticos, para proponer tareas e implementar clases que involucren procesos que favorezcan el desarrollo de estos, particularmente atendiendo a las directrices curriculares nacionales.

También el escribir este trabajo nos permitió pensar en las ventajas de la aplicación de las tareas y el uso del material didáctico para el desarrollo de distintos pensamientos como el pensamiento métrico y el pensamiento espacial, pudiendo usar un solo material para implementar distintas temáticas de la enseñanza de las matemáticas. Por este motivo dejamos en términos

generales las siguientes ideas para posibles interesados en el tema y a sugerencia de algunos que respondieron el cuestionario de validación:

- ¿Cuáles propiedades de polígonos cóncavos y convexos se pueden estudiar usando las diagonales en el círculo Waldorf?
- Usar el círculo Waldorf para identificar simetrías y nuevas propiedades que surgen al implementar nuevos patrones numéricos mayores a 10.
- ¿Cuáles propiedades geométricas de polígonos regulares pueden estudiarse mediante el uso de las mandalas?
- ¿Cuáles resultados se obtendrían con la aplicación de las tareas en distintos grados escolares?
- ¿Qué otros materiales se podrían implementar en la educación secundaria y media fundamentados en la pedagogía Waldorf?
- ¿Cómo están relacionadas las pedagogías Montessori y Reggio Emilia en la educación matemática?

El proceso de elaboración y escritura de este trabajo de grado fue bastante enriquecedor para nosotros y para nuestra vida académica, ya que nos involucramos en un proceso investigativo al buscar detalladamente bibliografía relacionada con la pedagogía Waldorf y la enseñanza de las matemáticas para determinar los antecedentes y el marco de referencia. Consideramos también, que en este proceso de investigación vimos la necesidad de articular las ideas que encontramos en la bibliografía con las nuestras y así poder construir unas nuevas para plasmarlas. Tratamos de plasmar las nuevas ideas con las palabras adecuadas en este trabajo de grado; de modo que la información fuese lo más concisa y entendible para los lectores, mencionando que, inicialmente nuestros conocimientos respecto a la pedagogía Waldorf eran



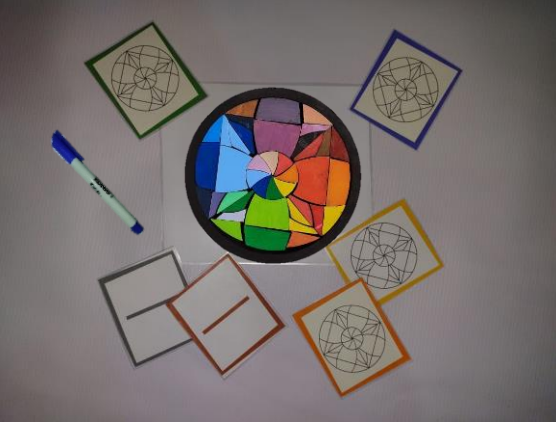

casi nulos. Hoy día, gracias a la elaboración de este trabajo, nos llevamos un gran bagaje de conocimientos respecto a qué es este modelo pedagógico, cuál es su historia y sus características principales; además de cómo se enseñan y aprenden las matemáticas, particularmente cómo desarrollar el pensamiento numérico y enseñar sistemas numéricos en este marco.

Por otro lado, es agradable para nosotros darnos cuenta de que al elaborar los materiales didácticos y diseñar las tareas propuestas, desarrollamos un proceso de innovación en la que involucramos un modelo pedagógico poco conocido en nuestro entorno y tal vez ajeno a los usuales. Logramos plantear una propuesta en la cartilla, que con mayor desarrollo puede llegar a romper algunos esquemas de la enseñanza tradicional de algunos contenidos en el aula de matemáticas, para promover en los estudiantes el desarrollo de procesos en los que logren la construcción de conocimiento matemático con el apoyo y guía del profesor como mediador. Con este trabajo pusimos a prueba nuestra creatividad para pensar qué objetos matemáticos pueden ser enseñados haciendo uso de un material didáctico en particular; también pusimos en práctica nuestros conocimientos y habilidades manuales para la elaboración de cada uno de los materiales para que estos quedasen estéticamente lindos y que no fuesen frágiles para manipularlos.

Finalmente, tuvimos la idea de elaborar los materiales didácticos con la intención de donarlos al Laboratorio de Didáctica de las Matemáticas de la UPN, de modo que decidimos organizar cada material didáctico en kits (conjunto con tarjetas y demás objetos necesarios para el desarrollo de las tareas), según presentamos en la Tabla 5. Lo anterior, con el objetivo de que tanto profesores como estudiantes de la UPN tengan acceso a los materiales y a la cartilla de tareas y puedan utilizarlos o tomar inspiración de estos para producciones propias.

Tabla 5

Kits donados al Laboratorio de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Kit gnomos matemáticos Waldorf	Kit círculo Waldorf
	
Kit fracdala Waldorf	Kit arcoíris Waldorf
	

Referencias

- Abambari, K., y Bermeo, T. (2019). Ambiente de aprendizaje matemático basado en la pedagogía de Waldorf: Universidad Nacional de Educación. Recuperado de: http://repositorio.unae.edu.ec/bitstream/56000/1272/1/ILLARI_11.pdf
- Aguamarina. (12 de Febrero de 2018). *El arte de enseñar matemáticas: la historia de los amigos matemáticos*. De mi casa al mundo: <https://www.demicasaalmundo.com/blog/el-arte-de-ensenar-matematicas-la-historia-de-los-amigos-matematicos/>
- Batanero, C., Font, V., y Godino, J. (2003). Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para Maestros. *Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Manual para el Estudiante*: Universidad de Granada. Recuperado de: https://ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf
- Bruno, A. (2000). Sentido Numérico. (A. Martínón, Ed.) *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas. Las matemáticas del Siglo XX. Una mirada en 101 artículos*, 43, pp. 267-270. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2316599>
- Carlren, F. (1989). *Pedagogía Waldorf. Una educación hacia la libertad. La pedagogía de Ruldolf Steiner*. (M. L. Varillas, Trad.) Madrid, España: Editorial Rudolf Steiner. Recuperado de: https://docenteslibresmdq.files.wordpress.com/2013/12/pedagogia_waldorf_calgren.pdf
- Casallas, L., y Torres, E. (2021). Materiales, recursos y juego: una distinción y relación necesaria en el aula de matemáticas. *Infancias imágenes*, 20(2), pp. 206-2015. Recuperado de: <https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/infancias/article/view/17590>

- Castro, E., y Rico, L. (1995). *Pensamiento Numérico en Educación Secundaria Obligatoria*. Granada, España: Universidad de Granada. Recuperado de:
<https://core.ac.uk/download/pdf/12341088.pdf>
- Cifuentes, J., y Pitre, S. (2021). Desarrollo del pensamiento numérico mediante secuencia didáctica en modelo educativo escuela nueva para grado segundo. *Revista Pensamiento Americano*, pp. 29-48. <https://doi.org/10.21803/penamer.14.28.377>
- Corredor, D., y Gordillo, T. (2020). *Partetouille y Fractionary: juegos para la enseñanza de las fracciones*: Universidad Pedagógica Nacional.
- Cruz, E. (2015). *Formação de Professores no Contexto Das Propostas Pedagógicas de Ruldolf Steiner (Pedagogia Waldorf), María Montessori e da Experiencia da Escola da Ponte*. Rio Claro, Sao Paulo, Brasil: UNESP. Recuperado de:
<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/132194>
- De Figueiredo, K. (2016). *O papel da matemática no desenvolvimento do indivíduo na perspectiva da Pedagogia Waldorf*. São Paulo, Brasil: Universidade São Paulo. Recuperado de: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-18032019-151611/pt-br.php>
- Fernández, J., Flores, P., Ramírez, R., y Ruiz, J. (2019). Tareas que desarrollan el sentido matemático en la formación inicial de profesores. *Educación Matemática*, 31(1), pp. 121-143. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7007106>
- García, J., y Sotos, M. (2015). Los algoritmos al alcance de la mano. Una aproximación metodológica manipulativa. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, pp. 41-60. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5589283>

- Gómez, P., Mora, M., y Velasco, C. (2018). Capítulo 5. Análisis de instrucción. En P. Gómez, M. Mora, y C. Velasco, *Formación de profesores de Matemáticas y Práctica de Aula* (pp. 197-268). Recuperado de:
<http://funes.uniandes.edu.co/11906/1/Gomez2018AnalisisInstruccion.pdf>
- Home, J., y Rincón, S. (2017). Modelo pedagógico Waldorf en Sierra Morena, Ciudad Bolívar: aportes en las prácticas de cuidado del jardín infantil, que hacen de la corporación un territorio de paz. Pontificia Universidad Javeriana. Recuperado de:
<https://repository.javeriana.edu.co/handle/10554/38085>
- Marcos, M. J. (2014). Historia y actualidad de la Pedagogía Waldorf. Palencia, España: Universidad de Valladolid. Recuperado de:
<https://www.ucm.es/data/cont/media/www/pag-124675/Historia%20y%20actualidad%20de%20la%20pedagogii%CC%80a%20Waldorf%20seguir%CC%80n%20Marii%CC%80a%20Jesui%CC%80s%20Marcos%20Martii%CC%80n.pdf>
- Marques, F., y Pontin, M. (2021). Matemática viva e reflexiva: vivenciando o ensino da matemática no contexto da Pedagogia Waldorf. *Saberes docentes e formação profissional: Currículo, práticas y tecnologías*, pp. 79-91.
- McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. Recuperado de: <https://film-journal.org/Articles/94F594EF72C03412F1760031075F2.pdf>
- Mersenne, M. (2015). *Math Storytelling: Lisa's Story*. Natural Math:
<https://naturalmath.com/2015/01/math-storytelling-lisas-story/>

- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Competencias en Matemáticas V2*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Morales, S. (30 de Noviembre de 2022). Charla sobre la Pedagogía Waldorf. (D. Niño, L. Romero, y L. Mora, Entrevistadores)
- Morcote, O. y Flores, P. (2001). *Algunos Elementos del Conocimiento Profesional en la Planeación de Clases de Futuros Profesores de Secundaria (Un Caso: las Fracciones)*: Universidad de Sevilla, España.
- Moreno, M. (2010). Pedagogía Waldorf. *Arteterapia: Papeles de arteterapia y educación artística para la inclusión social*. Vol. 5. pp. 203-209. ISSN: 1886-6190. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3345576>
- Muñoz, V. (2015). Sistematización de una experiencia pedagógica acerca de las seis relaciones trigonométricas, y la ley de senos y cosenos, realizada en el colegio Luis Horacio Gómez. Cali : Universidad del Valle. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/11045/1/Mu%C3%B1oz2015Sistematizaci%C3%B3n.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Números y Operaciones. En N. C. (NCTM), *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (pp. 34-45). Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/277860403_Principios_y_estandares_para_la_educacion_matematica_una_vision_de_las_matematicas_escolares

Niño, D., Romero, L., y Sánchez, V. (2018). *Toma aritmética - Tabla de multiplicación Waldorf*. Bogotá, Colombia: (No publicado).

Pita, L., y Samboní, Y. (2012). Cuento para motivar el aprendizaje de la adición entre números enteros: tres zonas, un misterio. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Rawson, M. (2017). Pedagogía Waldorf: un ciclo continuo de renovación. *Las tareas educativas y el contenido del Currículo Steiner/Waldorf*. Recuperado de:

<https://es.scribd.com/document/554989338/Pedagogia-Waldorf-Un-ciclo-continuo-de-renovacion-Martyn-Rawson>

Rico, L. (1996). *Pensamiento Numérico*. Granada, España: Universidad de Granada. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/278004432_Pensamiento_numerico

Rodríguez, C. (2018). *Pertinencia del juego guiado a través de juego lúdico, juego matemático y uso de material didáctico para el desarrollo del pensamiento numérico de los niños y niñas de Grado Transición del Jardín Infantil Chiquilines de Pereira*. Pereira:

Corporación Universitaria Minuto de Dios. Recuperado de:

<https://repository.uniminuto.edu/handle/10656/7523>

Sanchez, N. (2020). El entorno como recurso de aprendizaje. *Comunicación presentada en experiencias de práctica a distancia*. Facultad de Educación. Universidad de los Andes.

Bogotá, Colombia. Recuperado de:

<http://ued.uniandes.edu.co/Difusi%C3%B3n/Aprenderyense%C3%B1armatem%C3%A1ticasdesdecasa/Experienciasdepr%C3%A1ctica.aspx>

Uicab, G (2009). *Materiales tangibles. Su influencia en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática*

Educativa (pp. 1007-1013). México DF, México: Comité Latinoamericano de

Matemática Educativa A. C. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/5119/>

Valencia, K. (2020). *Secuencia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la noción de triángulo, mediada por la argumentación y aproximación a la verdad: en el contexto de la pedagogía Waldorf*. Medellín, Colombia: Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de: https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/77415?locale-attribute=pt_BR

Anexos

Anexo A

Estándares enfocados a la comprensión del significado de los números

Tabla 6 Estándares colombianos relacionados con la comprensión del significado de los números, sus representaciones y las relaciones entre ellos.

Etapa escolar	EBCM (Qué se espera que debieran saber o hacer los niños)
1° - 3°	<ul style="list-style-type: none"> • Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros). • Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones. • Uso representaciones (principalmente concretas y pictóricas) para establecer equivalencias de un número y explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal. • Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos.
4° - 5°	<ul style="list-style-type: none"> • Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones. • Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes.
6° - 7°	<ul style="list-style-type: none"> • Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. • Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.).
8° - 9°	<ul style="list-style-type: none"> • Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. • Utilizo la notación científica para representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes.
10° - 11°	<ul style="list-style-type: none"> • Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales. • Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.

Anexo B

Estándares asociados a la comprensión del significado de las operaciones

Tabla 7 Estándares colombianos relacionados con la comprensión del significado de las operaciones y de las relaciones entre ellas

Etapa escolar	EBCM (Qué se espera que debieran saber o hacer los niños)
1° - 3°	<ul style="list-style-type: none"> • Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.). • Comprender los efectos de sumar y restar números naturales. • Comprender situaciones que impliquen multiplicar y dividir, tales como la de agrupamientos iguales de objetos y la de repartir en partes iguales.
4° - 5°	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones. • Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición, transformación, comparación e igualación. • Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.
6° - 7°	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. • Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.
8° - 9°	<ul style="list-style-type: none"> • Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas. • Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. • Comprender y utilizar las relaciones inversas entre la adición y la sustracción, la multiplicación y la división, elevar al cuadrado y extraer raíz cuadrada, para simplificar cálculos y resolver problemas.
10° - 11°	<ul style="list-style-type: none"> • Comparo y contrasto las propiedades de los números y las de sus operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.

Anexo C

Estándares relacionados con hacer cálculos con fluidez y estimaciones razonables

Tabla 8

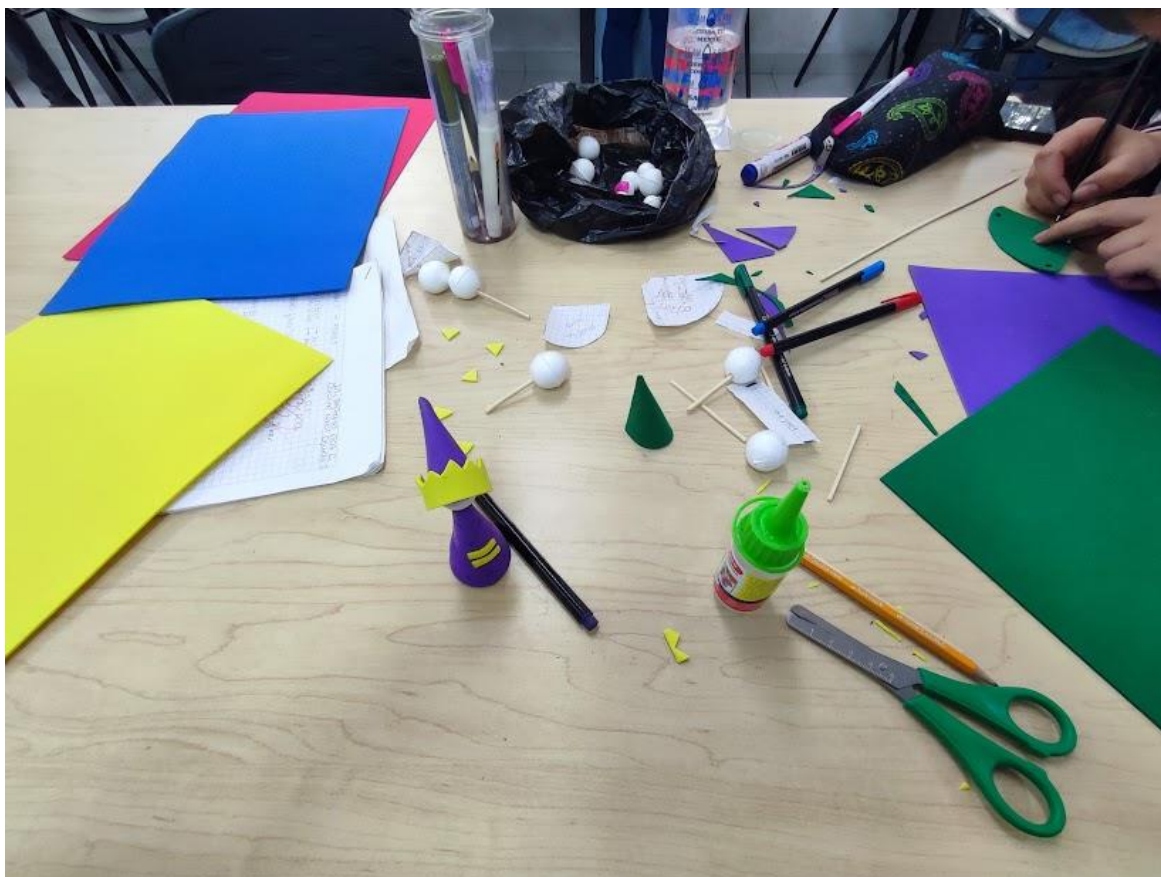
Estándares colombianos relacionados con hacer cálculos con fluidez y hacer estimaciones razonables.

Etapa escolar	EBCM (Qué se espera que debieran saber o hacer los niños)
1° - 3°	<ul style="list-style-type: none"> • Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. • Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables. • Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación.
4° - 5°	<ul style="list-style-type: none"> • Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. • Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.
6° - 7°	<ul style="list-style-type: none"> • Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas • Justifico la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas.

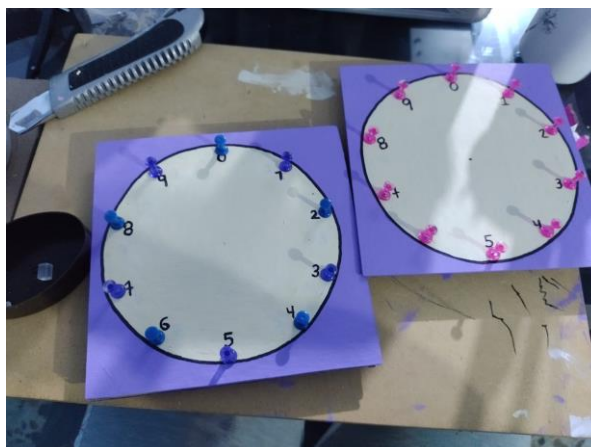
Anexo D

Fotografías – Proceso de elaboración de material Waldorf

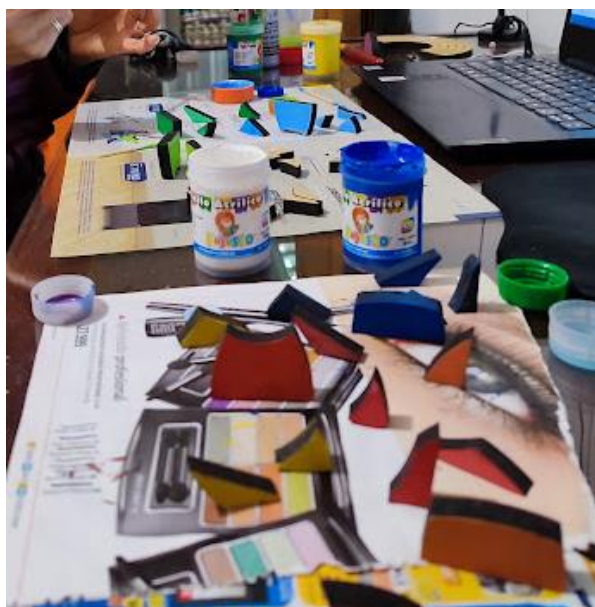
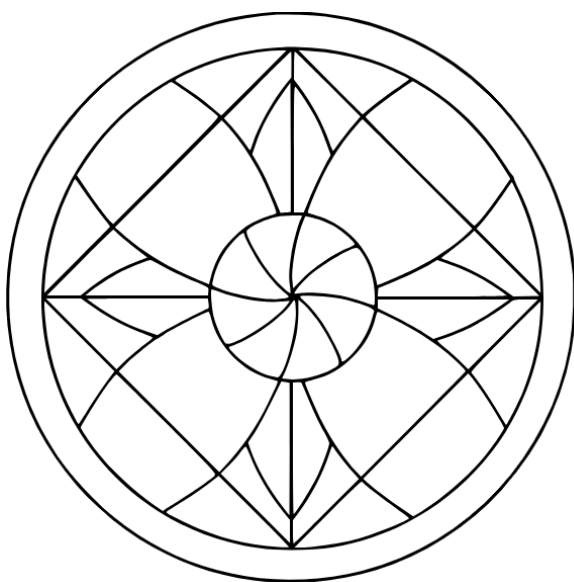
Gnomos matemáticos Waldorf



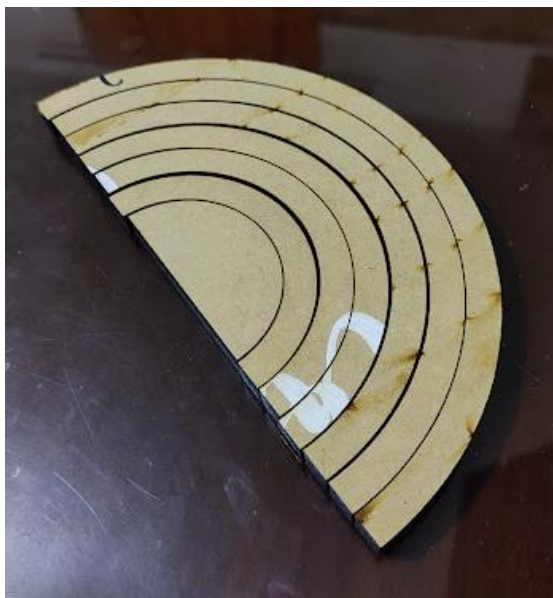
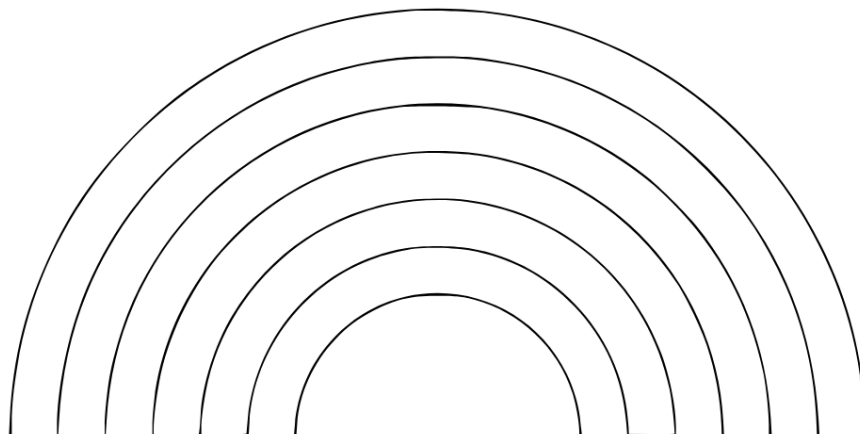
Circulo Waldorf



Mandala Waldorf



Arcoíris Waldorf



Anexo E

Guía para maestros – maestros en formación

A continuación, presentamos la primera versión de la guía para profesores interesados en implementar una propuesta de tareas matemáticas para desarrollar pensamiento numérico en los y las estudiantes de diferentes niveles escolares, enmarcadas en la pedagogía Waldorf y en materiales didácticos propios de esta pedagogía.

Tareas matemáticas con materiales didácticos de la pedagogía Waldorf

para desarrollar el pensamiento numérico en
estudiantes del segundo y tercer septenio



Tareas matemáticas con materiales didácticos de la pedagogía Waldorf para desarrollar el pensamiento numérico en estudiantes del segundo y tercer septenio

Guía práctica para docentes

Autores:

Daniel Enrique Niño Porras
Luz Andrea Romero Fajardo

Revisado por:

Lyda Constanza Mora Mendieta

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Licenciatura en Matemáticas
2023

Índice

Presentación	143
Pedagogía Waldorf.....	144
Kit gnomos Waldorf matemáticos	147
Cuento – Operaciones matemáticas básicas – Adición y sustracción.....	148
Los amigos matemáticos y el acertijo de las piedras mágicas	151
Kit círculo Waldorf	157
Multipliquemos sumando: conteos y ritmos	159
Kit mandala Waldorf.....	166
Noción de fracción e interpretación parte-todo con la “ <i>Fracdala</i> ”	167
Kit arcoíris Waldorf	171
Aproximando a π con el arcoíris Waldorf.....	172

Presentación

La presente guía denominada “Tareas matemáticas con materiales didácticos de la pedagogía Waldorf para desarrollar el pensamiento numérico en estudiantes del segundo y tercer septenio”, es producto del trabajo de grado titulado “Materiales didácticos para aprender matemáticas desde la Pedagogía Waldorf”, para optar al título de licenciados en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, D.C., Colombia), tiene la finalidad de dar a conocer diferentes tareas que involucran el uso de materiales didácticos para la enseñanza y el aprendizaje de objetos matemáticos y procesos relativos al pensamiento numérico y sistemas numéricos.

De este modo, se comparte esta guía a maestros titulados y maestros en formación inicial interesados en implementar estas tareas para, entre otros propósitos, desarrollar el pensamiento numérico en sus estudiantes.

Se enseñan los materiales didácticos contemplados para la elaboración de esta guía y seguido de la presentación de cada uno se encuentran las tareas que involucran el uso de dicho material. Las tareas que se presentan a continuación están divididas en dos partes:

La primera parte contiene una descripción de los elementos que se deben utilizar para cada tarea con una breve descripción de las principales características y aspectos generales a tener en cuenta.

La segunda parte contiene una tabla con los elementos característicos a contemplar en la planeación y ejecución de la tarea desde el rol docente, asimismo se consignan algunas indicaciones de cómo desarrollar la secuencia de enseñanza de cada tarea. Algunos de estos elementos están relacionados con la intencionalidad de la tarea (requisitos, objetivos y metas), con el nivel escolar de los estudiantes al cual va dirigida la tarea, con los asuntos matemáticos y

las características fundamentales de la tarea en relación con la pedagogía Waldorf y con algunos de los estándares del nivel escolar y del contenido respectivo que atienden a los referentes curriculares nacionales (MEN, 2006).

Pedagogía Waldorf

Para que entendamos un poco de qué se está hablando, conozcamos o identifiquemos qué es la pedagogía Waldorf.

La pedagogía Waldorf es un modelo pedagógico fundado por Rudolf Steiner en el año 1919. Steiner fue un filósofo, escritor, educador y fue creador de la antroposofía, ciencia que contempla al ser humano como un ser tripartito formado por cuerpo, alma y espíritu. (Marcos, 2014).

Steiner planteó como principios de la Pedagogía Waldorf, por un lado, comprender la naturaleza del ser humano a partir de sus desarrollos evolutivos divididos en septenios (etapas de 7 años cada uno), y, por otro lado, la importancia del papel del maestro como facilitador del proceso de desarrollo del individuo (estudiantes). Lo anterior visto desde tres aspectos que se constituyen en los supuestos que sustentan estos procesos de comprender el desarrollo evolutivo en la formación de estudiantes en marco de la pedagogía Waldorf, que son: el teórico, el filosófico y el metodológico (Cruz, 2015).

Según Carlgren (1989), en los inicios de la pedagogía Waldorf fueron separados los ciclos escolares gracias a los estudios de Rudolf Steiner sobre la evolución del ser humano. Esta idea de los ciclos educativos fue creada por Steiner, quien propuso que la mente, el cuerpo y el espíritu de cada individuo va evolucionando en períodos de 7 años denominado septenios, ya que durante estas épocas los individuos (estudiantes) suelen tener cambios importantes no solo físicos, sino también emocionales e intelectuales. Dado nuestro interés particular por la

pedagogía Waldorf y en ver su funcionalidad desde la educación matemática desarrollando el pensamiento numérico, la propuesta de tareas que se presentan en esta guía docente se enfatiza en torno al segundo y tercer septenio que explicaremos brevemente a continuación:

Segundo septenio (7 a 14 años). En el segundo septenio los estudiantes inician la escuela en términos de la formalidad. La jornada escolar está estructurada siguiendo un ritmo que “oscila entre captar y vivenciar, y entre realizar y crear, lo que se puede considerar como un gran ritmo de aspiración y espiración” (Marcos, 2014, p. 34). En las escuelas Waldorf se reconoce que a medida que los niños desarrollan habilidades para procesos intelectuales, se les dan materias que exigen mayor saber, acompañado de materias complementarias que son enfocadas en el desarrollo integral de los estudiantes como pintura, crayola, cocina, jardinería, entre otras según el grado escolar.

En este septenio se marca la diferencia con respecto a la forma de enseñar en la pedagogía Waldorf y en la enseñanza tradicional, ya que se pretende que las temáticas sean abordadas, en un principio, con historias y cuentos que ayuden a generar en los niños imágenes de los objetos de aprendizaje de diferente tipo. Posteriormente existe una transición de una representación figural a construir una definición del objeto y darle un nombre propio. El aprendizaje está articulado siempre con un sentido artístico y los docentes son los encargados de despertar el interés y entusiasmo de los niños. Su formación debe ser voluntaria y no de obligación, por consiguiente, la voluntad de los estudiantes se moldea en libertad de sus propios derechos.

Tercer septenio (14 a los 21 y en adelante). En esta etapa se desarrollan a fondo los conceptos abstractos en relación con los contenidos correspondientes al año escolar que pertenezcan los estudiantes. En este periodo de tiempo cambia la concepción pedagógica, se da

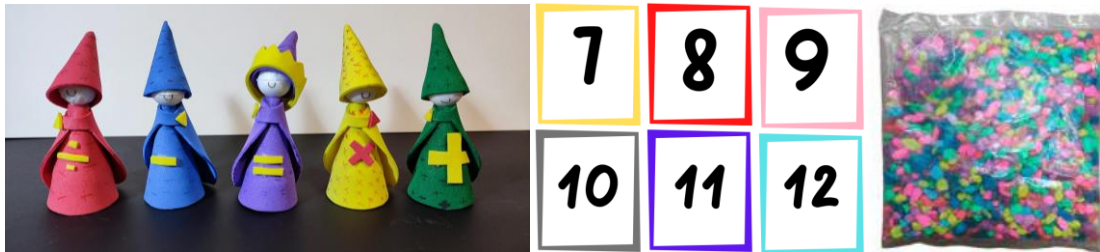
una educación a través del pensamiento, ya que se espera que los jóvenes estén listos para dar juicios y críticas desde sus conocimientos; por lo tanto, el aprendizaje estará mayormente sometido por el razonamiento. Sin embargo, se mantiene la intención de desarrollar actividades que contribuyan a la autonomía y libertad de los estudiantes.

Con estas ideas se pretende hacer una propuesta de tareas matemáticas para estudiantes en estos rangos de edades, de modo que sea posible potenciar el pensamiento numérico y sistemas numéricos mediante dichas tareas y el uso de materiales manipulativos que estén permeados de un sentido artístico y agradable para los y las estudiantes. Además, estos materiales tienen una tipificación o utilidad relacionada con el momento en el que son implementados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se clasifican así:

- **Pre – instruccional:** este tipo de material se utiliza al momento de introducir un concepto. Con el uso de este se resalta la pertinencia de utilizar objetos que permitan la exploración de los estudiantes y un primer acercamiento al objeto a enseñar.
- **Co – instruccional:** es el tipo de material utilizado durante la enseñanza de un concepto. El material favorece la enseñanza, pues sirve como apoyo en este proceso.
- **Post – instruccional:** como su nombre lo indica, este material se usa posterior a la instrucción o a la enseñanza con el fin de fortalecer el aprendizaje del concepto enseñado.

Con esta contextualización general, ahora sí veremos las tareas que están diseñadas a partir del uso de materiales propios de la pedagogía Waldorf como lo son: el círculo de multiplicación Waldorf, los gnomos Waldorf, el arcoíris Waldorf y la mandala Waldorf, estos son los principales materiales de la pedagogía en mención para la enseñanza de las matemáticas. Cabe mencionar que estos materiales fueron de fácil elaboración con bajo costo.

Kit gnomos Waldorf matemáticos



Kit gnomos Waldorf. Fotografía del material elaborado por los autores.

Materiales para su elaboración:

- Bolitas de icopor
- Papel foami o fieltro de colores
- Silicona líquida.

Tutorial de elaboración: <https://www.youtube.com/watch?v=oF366TH1VEA>

Descargable para imprimir: <https://tinyurl.com/2qajhvwb>

En la pedagogía Waldorf las historias fantásticas y los cuentos cobran especial importancia para el aprendizaje de los estudiantes, ya que son un medio para dejar, en un principio, imágenes en los estudiantes sobre los saberes, permitiendo un primer acercamiento a estos. Por tanto, las figuras gnomos Waldorf, junto con una buena historia, pueden ser una combinación favorable para la enseñanza de los números, de algunas operaciones matemáticas y para comprender los efectos de dichas operaciones sobre los números involucrados.

Descripción del kit

Este kit consta de los gnomos Waldorf matemáticos, que son figuras pequeñas con forma humana hechos con foami, adaptados para la enseñanza de las matemáticas de forma tal que cada una lleva en su atendo uno de los símbolos de las operaciones matemáticas; el kit también trae un paquete de tarjetas con numerales del uno al quince y un paquete de piedras de colores.

Presentamos a continuación una primera tarea para despertar el interés en los estudiantes sobre las operaciones matemáticas básicas que permita en ellos dejar volar su imaginación al escuchar el cuento e ir creando imágenes y relacionando los conceptos abordados a partir de un hacer matemático y creativo con la guía del profesor/a.

Cuento – Operaciones matemáticas básicas – Adición y sustracción			
Material: gnomos Waldorf matemáticos			
Requisitos	Verificar que los estudiantes: <ul style="list-style-type: none"> • Sepan contar hasta 50 • Reconozcan los numerales hasta 50 		
Objetivo o meta	Reconocer los efectos de las operaciones básicas entre números naturales, particularmente de la adición y la sustracción.		
Aspectos de la pedagogía Waldorf con los que la tarea se relaciona	<ul style="list-style-type: none"> • Narraciones. • Imaginación. • Exploración. • Enseñanza de operaciones matemáticas básicas simultáneamente. 	Estándar(es) básico(s) de competencias matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> • Comprender los efectos de sumar y restar números naturales. • Uso representaciones (principalmente concretas y pictóricas) para establecer equivalencias de un número.
		Aspecto del pensamiento numérico	Comprensión del significado de las operaciones.
		Contenido(s) del pensamiento numérico asociado(s) a la tarea	Adición y sustracción números naturales a partir de acciones relacionadas a la adición y sustracción.
Utilidad	Co-instruccional	Posible grado escolar	2°-3°
		Septenio	2 (7-14 años)
Asuntos matemáticos relacionados al tema del	Por una parte, hay acciones cotidianas que se relacionan con la adición (+), que pueden ser representadas matemáticamente con esta operación. Estas son: juntar, agregar, añadir, etc.		

<p>pensamiento numérico y sistemas numéricos</p>	<p>Para el abordaje de la adición es visible la acción de juntar y agregar por parte de los personajes del cuento. Esto es posible, gracias a que se dispone de una colección de piedras de diferentes colores, tamaños y formas las cuales se presentan en dos grupos separados, después se juntan y se tiene una cantidad total de piedras sin importar sus características.</p> <p>Por otra parte, existen otras acciones cotidianas que se relacionan con la sustracción ($-$), que también pueden ser representadas matemáticamente con esta operación.</p> <p>En el cuento se presenta una situación en la que uno de los personajes pierde cierta cantidad de piedras de una colección que tenía. Al presentar situaciones de quitar elementos de algún grupo de objetos se efectúa internamente la sustracción.</p>
<p>Proceso a desarrollar atendiendo a la pedagogía Waldorf</p>	<p>A partir de la lectura se pretende dejar en los estudiantes imágenes que les permitan:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identificar las operaciones matemáticas básicas. • Explorar y conocer diferentes representaciones de los números. • Operar sobre cantidades. • Reconocer los efectos de las operaciones sobre los números. • Reconocer el signo igual como una equivalencia entre expresiones con sumas y restas. <p>Se pretende recolectar una colección de imágenes sobre los números, operaciones y los resultados de operar diferentes números para darle un significado posteriormente.</p>

Secuencia de enseñanza: significado de la adición

1. Organizar a los estudiantes por equipos de tres con los siguientes materiales para cada equipo:
 - Gnomos Waldorf con signos de las operaciones básicas ($+$, $-$, \times , \div , $=$).
 - Tarjetas con numerales.
 - Piedritas de colores de bisutería.
 - Cuento guía: enseguida de la presente tabla se presenta un cuento que acompaña el desarrollo de la actividad en clase que está sujeto a adaptaciones y a ser complementado por parte del docente.
2. El/la profesor/a lee el cuento “*Los amigos matemáticos y el acertijo de las piedras mágicas*” (anexo), a medida que la lectura va fluyendo, y los estudiantes prestan atención, el docente puede realizar pausas para enseñar estas operaciones matemáticas e interactuar con los gnomos, recreando las escenas que se van narrando en el cuento, permitiendo también que los estudiantes puedan manipular el material.

3. Pausas para actividades de exploración con los estudiantes, e identificar los efectos de las operaciones:

- Adición
- Sustracción

Al momento de abordar las operaciones con la lectura, el profesor puede profundizar en la explicación de los efectos de estas: Asignando a sus estudiantes realizar algunas sumas y restas con las piedras de colores, las tarjetas con los numerales y, por supuesto, con los gnomos Waldorf, como se ejemplifica en la siguiente figura:



Gnomos Waldorf. Material elaborado por los autores.

El docente puede hacer preguntas para que los estudiantes interactúen entre ellos y el profesor. Se presentan sugerencias con algunas notas al pie de página para que sean tomadas en cuenta por el docente.

4. Para finalizar la clase, el profesor puede preguntar a los estudiantes qué tal les pareció la historia. Seguidamente puede realizar preguntas sobre los personajes del cuento que, en este caso, tienen como roles los efectos de las operaciones al operar con números. Con esto último se puede concluir la actividad con la institucionalización de estas operaciones matemáticas básicas, aludiendo a los efectos de estas operaciones a partir de las acciones explicadas anteriormente en este esquema.

Otras ideas para inspirar a profesores

1. Comprender significado de la adición: añadir (problemas de transformación), reunir (problemas de combinación-composición), comparar e igualar.
2. Comprender el concepto de “ser divisor de” (hacer colecciones de piedras de igual cantidad en ciertos números de canastos).
3. Comprender los significados de la división (cuotitiva y partitiva).
4. Relacionar la idea de siguiente-sucesor de un número con el efecto de sumar 1 a un número dado.

Anexo

Con notas al pie de página a lo largo del cuento se hacen sugerencias de preguntas y acciones a realizar por el profesor para abordar, desde la misma situación, diferentes formas que se relacionan con la adición y la sustracción.

Los amigos matemáticos y el acertijo de las piedras mágicas

En el Reino de los Números, un país gobernado por el rey Igual, el más justo y honesto de todos, vivían cuatro enanitos muy particulares. Ellos vestían atuendos con extravagantes colores y en estos llevaban unos dibujos bordados con hilo de plata. Los enanitos se llamaban Adi, Sus, Multi y Divis.¹⁵

Adi era una fanática de recolectar cosas que encontraba por el bosque, ella reunía objetos que sus amigos le regalaban, y le gustaba presumirlos. Por otro lado, Sus, un enanito bastante testarudo y pedigüeño, siempre perdía las cosas que sus amigos le daban e intentaba quitarle las cosas a los demás. *¡Ay Sus! Eso no se hace*, le decían sus amigos; pero él insistía en que esto no estaba mal porque él siempre lo hacía a vista de todos.¹⁶ Por su parte, Divis era una enanita que le encantaba regalarle cosas a sus amigos, procurando repartir siempre la misma cantidad a cada uno de ellos. Y Multi, era un enanito bastante ágil para organizar sus pertenencias en los cajones de su casa, y realizaba cuentas numéricas con mucha facilidad. Estos enanitos se ocupaban de explorar cuevas y montañas cercanas al reino, para llevar minerales y recursos destinados a los trabajadores de este país.

Un día, un mensajero llegó apresurado a comunicarle al rey que, debido a un fuerte temblor en la tierra, una misteriosa cueva había quedado a la vista, y de ella salían bellos destellos y haces de luces. Inmediatamente el rey Igual llamó a los cuatro enanitos exploradores para investigar los secretos de esta cueva.

¹⁵ [El docente tendrá en cuenta que Adi (Adición) es el gnomo de la suma, Sus (Sustracción) el gnomo de la resta, Multi el gnomo de la multiplicación y, finalmente Divis el gnomo de la división. Sin embargo, se sugiere no mencionar algo al respecto para que los niños dejen volar su imaginación al pensar por qué esos nombres.]

¹⁶ [Se sugiere promover el diálogo sobre esta situación, de modo que los niños y niñas digan si esto es correcto o no lo es. Se considera importante abordar valores morales y ética también.]

—*Necesito, por favor, que se dirijan a la cueva de la que el mensajero habla*— Exclamó el rey Igual. —*¡Pero tengan mucho cuidado! No sabemos lo que hay allí*— Añadió él, muy preocupado.

—*No se preocupe, su majestad*— Respondieron al unísono los cuatro enanos.

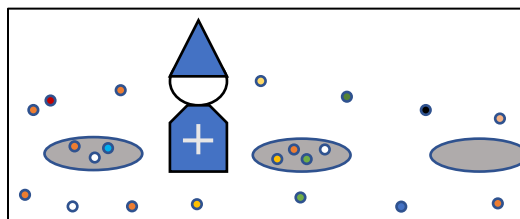
—*Trataremos de reunir los materiales y recursos que más podamos para traerlos aquí al reino.* — Dijo Adi, muy motivada.

Siendo así, los enanitos tomaron rumbo hacia la cueva, guiados por el mensajero que la encontró. De camino a este lugar, atravesaron por verdes bosques, cruzaron en una balsa un azul río, era tan azul que parecía una parte del cielo en la tierra. Tuvieron que acampar, pues se empezó a oscurecer. Allí, los enanitos junto con el mensajero se dieron a la tarea de construir unas pequeñas tiendas de campaña, y elaboraron una fogata para pasar la oscura y fría noche. Al cantar el gallo, estos valientes enanitos y el mensajero se levantaron, comieron, cepillaron sus dientes, recogieron sus cosas y continuaron su travesía. Cuando llegaron a la entrada de la cueva el mensajero intervino:

—*Hasta aquí los acompaño, mis valientes amigos. Hum... tengo muchas cosas que hacer*— dijo con voz temblorosa.

—*De acuerdo, no hay problema. Cuídate de regreso al reino*— respondió Sus, amablemente.

En seguida de esa breve despedida, los enanitos se adentraron en la cueva. Al entrar, todos quedaron sorprendidos por la luz que emergía de una gran cantidad de piedras preciosas de diversos colores. Allí se encontraron con una gran habitación con gemas por todo el recinto, también había tres mesas de piedra. En la primera y en la segunda había piedras, diferente cantidad en cada una y la tercera mesa no tenía piedras.¹⁷



Divis decidió tomar estas brillantes piedras y salir de la cueva, pero al hacerlo una fuerza misteriosa las volvió a atraer a las mesas en las que estaban. Los cuatro enanitos quedaron desconcertados y con la intriga de cómo llevarlas al reino. Teniendo en cuenta que el rey Igual

¹⁷ [El docente puede hacer aquí una pausa especialmente para que los niños recreen la escena]

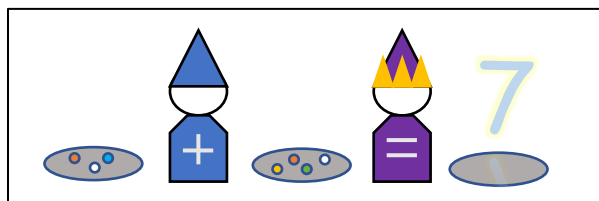
era un ser muy sabio, los enanitos decidieron pedirle amablemente su presencia en la cueva, comentándole sobre el misterio que los abrumaba. Cuando el rey Igual llegó, los enanitos le enseñaron al rey las piedras preciosas pero expresaron su preocupación al no poder retirarlas de las mesas y de la cueva en sí.

—*Bueno, estamos en un gran problema porque no se me ocurre qué hacer*— Dijo el rey igual de preocupado.

—*Intentemos buscar alguna pista en esta cueva*— Añadió el rey, proponiendo una idea.

—*¡Enseguida, su majestad!* — Exclamaron los cuatro enanitos.

Los cuatro enanitos y el rey Igual empezaron a explorar la cueva en busca de alguna pista que les pudiese ayudar a saber qué hacer. Estos cinco personajes se encontraban moviéndose y caminando por toda la cueva. Cuando el rey Igual y Adi se ubicaron entre las mesas que estaban en la cueva, de repente, se iluminó aún más el recinto y sobre la tercera mesa apareció un extraño símbolo.¹⁸



—*¡Adi, majestad, no se muevan!* — Exclamó Multi—*¿Qué acabaron de hacer?*— Añadió Sus.

—*No sabemos. Solo estábamos buscando bajo estas mesas si había algo útil*— contestaron Adi y el rey Igual.

—*¡DETÉNGANSE AHORA MISMO!* —Gritó una grave y fuerte voz.

Los cuatro enanitos y el rey Igual quedaron atónitos y con la piel erizada de la intimidante voz proveniente de quién sabe qué parte de la cueva.

—*¿Qu... qui...quién habla?* — Preguntó Adi con la voz temblorosa y la garganta entrecortada.

¹⁸ [El docente instruye a los niños y niñas a crear la situación, conforme la cantidad de piedritas que cada equipo haya ubicado en cada una de las mesas]

—*YO SOY EL GUARDIÁN DE LOS TESOROS DE ESTA CUEVA. SI ESTAS PIEDRAS PRECIOSAS SE QUIEREN LLEVAR EL ACERTIJO DE ESTE RECINTO DEBEN DESCIFRAR. USTEDES ENANOS SON ESPECIALES, ESTO LO VAN A LOGRAR*— Volvió a sonar la estruendosa voz.

—*RECUERDEN, EL SÍMBOLO QUE BRILLA ANTE USTEDES PODRÁN UTILIZAR*— Añadió la voz.

Al escuchar estas últimas palabras, Adi tuvo una grandiosa idea. Ella empezó a hablar: —*Vamos a ver cuántas piedritas hay en las mesas. En esta mesa hay una, dos y tres piedras. En esta otra hay una, dos, tres y cuatro brillantes piedritas*— seguidamente Adi pidió a Multi reunir del suelo la misma cantidad de las piedras que contaron juntos. Las pusieron sobre la tercera mesa vacía. Después mencionó:

—*Contemos esta cantidad final, tenemos una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, ¡y siete piedras brillantes!* — Concluyó Adi mientras les explicaba al rey Igual y sus amigos, los enanitos, que al reunir dos cantidades diferentes se obtiene una cantidad final, y esta es mucho más que las otras dos cantidades.¹⁹



Un brillo encegueció a nuestros queridos personajes de esta historia y al mismo tiempo ellos escucharon lo siguiente:

—*LO HAN CONSEGUIDO. UNO DE USTEDES HA VENCIDO LA PRIMERA PRUEBA, LA ADICIÓN. PUEDEN RETIRARSE CON SUS SIETE PIEDRAS PRECIOSAS*— Dijo la gran voz, mientras se desvanecía lentamente volviendo al silencio.

¹⁹ [El docente, en este punto de la historia, puede motivar a los niños a *plantear diferentes sumas* como reunir colecciones de objetos, asociando estas cantidades con las tarjetas de los numerales que representen dicha cantidad, tal cual como Adi hizo en el cuento]

—*¡Qué bien, lo hemos logrado!* — Celebraron al tiempo los cuatro enanitos.

—*Mmm... Pero ¿para qué sirven estas piedras? ¿Solo emiten brillo?* — Se cuestionó Divis.

—*Tengo un recuerdo*— Contestó el rey Igual. —*Cuando era niño, mi padre me solía contar una leyenda sobre unas piedras mágicas que tenían poderes de provecho para todas las criaturas del mundo. Una piedra se sembraba y al instante brotaban grandes árboles con deliciosos frutos. Otra piedra, era lanzada al río, y los pescados empezaban a saltar a las redes de los pescadores. Y la última piedra, era capaz de convertir cualquier cosa que fuera tocada por esta, ¡en oro!* — Finalizó el rey Igual, con la ilusión y la esperanza que estas piedras tuviesen estos místicos poderes.

—*Esperemos que sí, majestad. Volvamos al reino para investigar estas “mágicas” piedras*— Dijo Multi, animando al rey Igual y a sus amigos los enanitos. —*Yo me ofrezco a llevar las piedras. ¡Yo soy el más fuerte de aquí!* — Dijo Sus, presumiendo sus grandes músculos y sacando una canasta en donde echar las piedras.

Los valientes enanitos, junto con el rey Igual, partieron camino hacia el reino de los números. Volvieron a atravesar por los verdes bosques para llegar a su destino. Pero en un abrir y cerrar de ojos, Sus se tropezó y cayó al suelo, dejando caer por todos los lados las tan custodiadas piedras brillantes. —*¡No puede ser!* — Exclamó Adi. —*¿Cómo pude ser tan descuidado?* — Añadió Sus, lamentándose por haber perdido las piedras.

—*Busquemos, cada uno y rápidamente, todas las piedras. Recuerden que al final debemos reagrupar siete piedritas en total*— Ordenó el rey Igual mientras se disponía a buscar entre los arbustos.

—*Aquí tengo dos*— Dijo Adi. —*¡Yo tengo otra!* — Gritó Multi. —*Yo encontré dos más*— Alardeó Divis. —*Nosotros no encontramos ninguna*— Dijo el rey Igual y el enanito Sus al mismo tiempo.

Los enanitos reunieron un total de cinco piedras al ponerlas de vuelta en el canasto que transportaba Sus. Pero se cuestionaban sobre las piedras que habían perdido. ¿Cuántas piedras

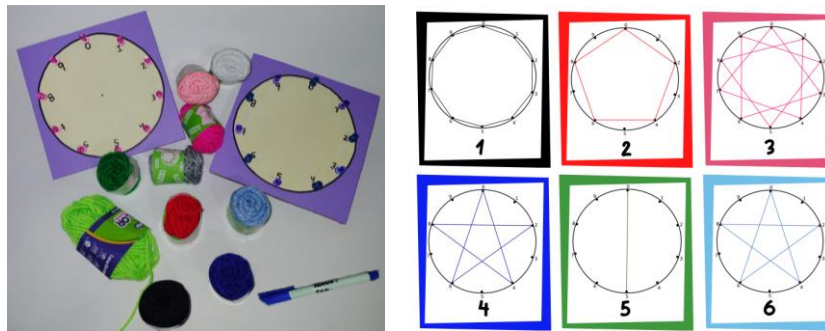
no llegarían al reino? Se preguntaron los cuatro enanitos y el rey Igual.²⁰ Los enanitos siguieron su camino al reino con las piedras que lograron recuperar. Allí confirmaron la magia de estos preciados objetos, con los cuales todos los habitantes del reino de los números sacaron provecho y se regocijaron por tal descubrimiento.

[La historia puede continuar, dejando volar la imaginación y creatividad del docente]

FIN

²⁰ [El docente puede plantear la pregunta a cada equipo respecto a cuántas piedras se perdieron, dando las pistas de la cantidad que había inicialmente, a partir de la acción *perder*, *quitar* o *separar* una cantidad de otra.]

Kit círculo Waldorf



Kit círculo Waldorf. Fotografía del material elaborado por los autores.

Materiales para su elaboración:

- Superficie de cartón, cartón paja o madera.
- Pines o chinchas con cabeza plástica.
- Barra de silicona.
- Hilo o lana.

Tutorial para su elaboración: <https://www.youtube.com/watch?v=wQ5Rqgd5GbY>

Descargable para imprimir: <https://tinyurl.com/2efgdgsc>

En la pedagogía Waldorf es importante la exploración y el material tangible para el desarrollo de temáticas que no son tan claras a la luz de las palabras. Por esto se destaca el hecho de contar con materiales didácticos que estén al alcance de profesores para la enseñanza. El círculo Waldorf es uno de esos materiales didácticos, el más conocido, tal vez, que permite la exploración y experimentación de distintas temáticas como el conteo, algunas secuencias numéricas con números naturales, la multiplicación entre números naturales, entre otras asociadas al sistema numérico de los números naturales representando a estos números con el sistema de numeración decimal.

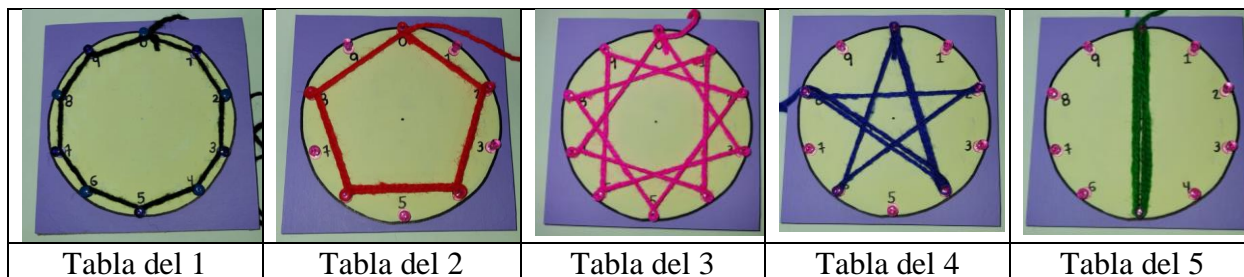
Descripción del kit

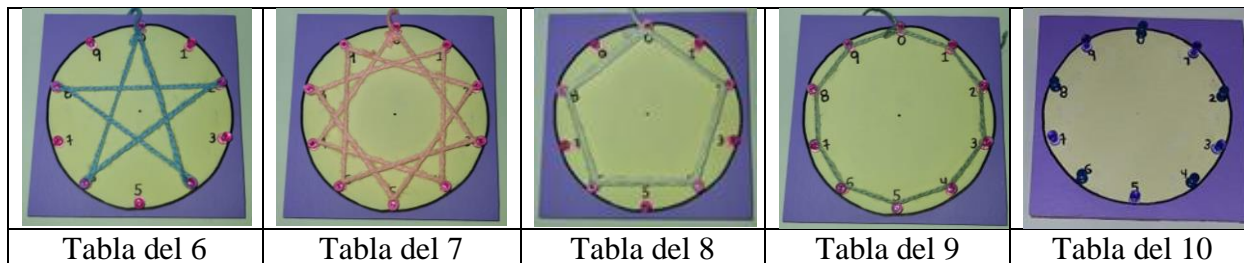
Este kit consta del círculo Waldorf, una circunferencia construida sobre una superficie plana de forma cuadrada, sobre la circunferencia y en el interior del círculo que esta define se ubican, de manera equidistante, los números del cero al nueve en sentido de las manecillas del reloj. Se refiere a cada número como posición 0, posición 1, ... y posición 9 o simplemente se alude a estas posiciones por el número asignado, diez (10) tiras de lanas de metro y medio de longitud y de distintos colores, un paquete de tarjetas con la representación del círculo Waldorf y las tablas de multiplicar (11 dirigidas a estudiantes y 20 para el profesor) y un marcador borrable.



Círculo Waldorf. Fotografía del material elaborado por los autores.

En la posición 0 se encuentra amarrada una lana de color, cada color tiene la intención de representar una tabla de multiplicación que va a estar asociada a una figura que será el componente visual o la imagen con la que el estudiante asociará dicha tabla, estas imágenes hacen parte de un conjunto de tarjetas del kit (como apoyo para el profesor o para los estudiantes). En la siguiente imagen se encuentran las tablas de multiplicación representadas con el círculo Waldorf:





Presentamos a continuación una primera tarea que desarrolla cómo utilizar este material didáctico para la construcción de las tablas de multiplicación, esta tarea que puede ser implementadas por el/la profesor/a en segundo o tercer grado de primaria.

Multipliquemos sumando: conteos y ritmos			
Material: Círculo Waldorf			
Requisitos	Verificar que los estudiantes: <ul style="list-style-type: none"> • Sepan contar al menos hasta 100. • Realicen conteos (de uno en uno, de dos en dos, etc.) iniciando en cualquier número. • Describan y resuelvan situaciones variadas con las operaciones de adición y sustracción. 		
Objetivos o meta	Reconocer la relación entre la multiplicación y la adición, entendiéndola multiplicación con uno de sus significados, como una suma repetitiva o iterada del mismo sumando.		
Correspondencia con la pedagogía Waldorf	<ul style="list-style-type: none"> • Exploración de procesos de conteo para evaluar la pertinencia de su uso en distintas situaciones en las que se enfrente el estudiante académicamente o en su cotidianidad. • Enseñanza de operaciones básicas al mismo tiempo (adición y multiplicación). 	Estándar(es) básico(s) de competencias matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> • Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de) en diferentes contextos. • Comprender situaciones que impliquen multiplicar y el agrupamiento de objetos iguales.

	<ul style="list-style-type: none"> • Construcción de significado para el proceso de la multiplicación a partir de la vivencia del proceso de multiplicar con el círculo. 		<ul style="list-style-type: none"> • Justifico regularidades y propiedades de los números.
		Aspectos del pensamiento numérico	Hacer cálculos con fluidez.
		Contenido(s) del pensamiento numérico asociado(s) a la tarea	Multiplicación entre números naturales. Realizar cálculos con fluidez.
Utilidad	Co-instruccional	Posible grado escolar	2°-3°
		Septenio	2 (8-14)
Asuntos matemáticos relacionados al contenido del pensamiento numérico y sistemas numéricos	<p>Las expresiones como “escribir tres veces el cinco y sumar” o “escribir dos veces el cuatro y sumar” se relacionan con uno de los procesos realizados en la multiplicación que son las adiciones repetidas con el mismo sumando. Con el círculo Waldorf es posible que los estudiantes desarrollen el aprendizaje de la multiplicación de forma agradable por medio de actividades como la exploración y visualización, de forma grupal o individual.</p> <p>Un significado de la multiplicación entre números naturales es entenderla como una forma abreviada de expresar una adición de sumandos iguales; por ejemplo: $6 + 6 + 6 + 6 = 6 \times 4 = 24$. Los números que se multiplican se llaman factores y el resultado se denomina producto.</p> <p>Otro significado de la multiplicación son las secuencias numéricas de las cifras de las unidades de los resultados de los conteos; ejemplo: Conteos de 2 en 2: 0, 2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, 6, 8, ... Que corresponden con las cifras de las unidades de los productos de la tabla del 2.</p>		
Proceso por desarrollar atendiendo a la pedagogía Waldorf	<p>A partir de la manipulación del kit círculo Waldorf se pretende que los estudiantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Construyan las tablas de multiplicación para su aprendizaje posterior a través de conteos como lo es de uno en uno (tabla del uno) y de manera sucesiva hasta de nueve en nueve (tabla del nueve). • Establecer una relación entre la tabla de multiplicación y la imagen generada al completar la secuencia numérica con el círculo Waldorf a partir la exploración y la vivencia. 		
Secuencia de enseñanza: construcción de las tablas de multiplicar			

Antes de dar inicio con la implementación de esta tarea, se hace necesario realizar una exploración en compañía de los estudiantes de forma rítmica. Esta exploración tiene la finalidad de familiarizar a los estudiantes con conteos de secuencias numéricas a partir de movimientos corporales (manos y pies). El conteo debe ser fluido verbalmente y la secuencia marcada con ayuda de los movimientos haciendo distinción unos con otros.

1. El profesor debe dar la instrucción de dejar el puesto libre para realizar un ejercicio de esparcimiento antes de dar inicio con la clase (esto puede ser modificado según la creatividad de cada profesor ya que también se puede realizar de pie ubicados en círculo) les explicará que van a realizar un juego de golpe con las manos, pero recitando los números sin parar como el siguiente ejemplo:

Para la secuencia numérica de tres en tres, se debe: cantar “uno”, “dos” acompañados de golpes de palmas contra el puesto de los estudiantes y al cantar “tres” se da una palmada con las dos manos, se continúa cantando “cuatro”, “cinco” con golpe de palmas contra el puesto y al cantar “seis” se da una palmada con las dos manos de nuevo. Se continúa el anterior proceso de conteo cantando hasta que lo desee el profesor, teniendo en cuenta que es un movimiento o sonido tenue sobre el conteo practicado en este caso de tres en tres.

No olvidar que los números se deben decir sin hacer pausas ya que al recitar cada uno va a estar acompañado de un movimiento de los descritos. (los movimientos pueden variar por gusto del profesor teniendo en cuenta que se repitan dentro de la secuencia numérica) Dar continuidad a la exploración rítmica con distintas secuencias numéricas añadiendo otros movimientos.

2. Posterior a la exploración rítmica de secuencias numéricas el profesor debe organizar a los estudiantes de forma individual o grupal según la disponibilidad del kit o los intereses del docente.
3. Cuando cada estudiante o grupo de estudiantes disponga del material: kit círculo Waldorf, el/la profesor/a, junto con los estudiantes, describirá el círculo Waldorf.
4. El profesor enseñará cómo usar el círculo Waldorf. (Anexo 1)
5. Posterior al uso del círculo Waldorf el profesor indicará a los estudiantes cómo usar las tarjetas tipo 1. (Anexo 2)
6. Luego de la exploración con las tarjetas tipo 1, el profesor dará a conocer las tarjetas tipo 2 para dar la construcción de las tablas de multiplicar. (Anexo 3)
7. Para finalizar, el profesor puede preguntar a los estudiantes sobre la actividad, qué tal les pareció e institucionalizando las tablas de multiplicar. Además, recordarles a los estudiantes que las tarjetas de tipo 2 les quedarán para repasar las tablas para su posterior memorización o uso, mientras las aprenden.

8. Preguntas y/o indicaciones que pueden realizar los profesores cómo apoyo al desarrollo de la tarea:
- ¿Qué pasa si me salto un número al contar?, se espera que noten el cambio en las figuras ya que no se visualizarán de forma “armónica”. Ejemplo, si la figura resultante debes ser una estrella, al saltarse el patrón por error va a modificar dicha figura.
 - ¿Cómo se altera mi material si hago mal una adición?, se espera que los estudiantes aludan a que no se ve una guía en la forma de llevar la lana.
 - Cuando los estudiantes terminen uno de los conteos, permitir que exploren por disposición propia con otros números de tal forma que les permita reportar inquietudes o anotar aspectos relevantes como la repetición de imágenes en el resultado de algunas tablas de multiplicación.

Otras ideas para inspirar a profesores

1. Comprender el concepto de “ser múltiplo de” según el conteo que desee realizar el docente con los estudiantes con ayuda del círculo Waldorf.

Anexos

Anexo 1. Explicación uso círculo Waldorf

Los siguientes ejemplos son una descripción de cómo se puede presentar el círculo Waldorf a un grupo de estudiantes para que comprendan el proceso que deben realizar para hacer el estudio de las tablas de multiplicación.

El estudiante o persona que esté utilizando el material realiza conteos, iniciando de uno en uno, luego de dos en dos, y así sucesivamente, utilizando las lanas de colores como se ve en la tabla de la *descripción del kit*; es decir, a cada tabla de multiplicar le corresponde un color específico de lana. Al tomar el color del conteo a realizar y ponerlo en la posición 0 va dando un giro con la lana en la posición correspondiente con el fin de que la lana quede firme. Por ejemplo, si se realiza el conteo de dos en dos entonces debe dar un giro al pasar por la posición 2 con ayuda de la lana, luego en la posición 4 y así sucesivamente, aquí se explica este proceso.

Para el conteo de la tabla del uno se puede realizar mediante sumas como $0 + 1 = 1$ y $1 + 1 = 2$ o conteos de uno en uno, con cualquiera de las dos opciones, de manera conjunta al conteo se va a ir dando un giro en la posición correspondiente en el círculo Waldorf; se repite el ejercicio con la continuidad del conteo y dando giro con la lana en las posiciones siguientes. El anterior proceso será realizado sucesivamente hasta llegar a la última posición que estaría

indicada por la finalización de la tabla de multiplicar de forma usual, pero en ese momento de la explicación no se va a aludir a la multiplicación, el conteo va a estar dirigido hasta donde lo disponga el/la profesor/a continuando con el conteo se llegaría a 10 que corresponde a

$10 \times 1 = 10$, que se representa anudando la lana en la posición 0, porque se elige la cifra de las unidades. El estudiante va a relacionar la tabla de multiplicación del uno o el conteo de uno en uno con un decágono. Así:

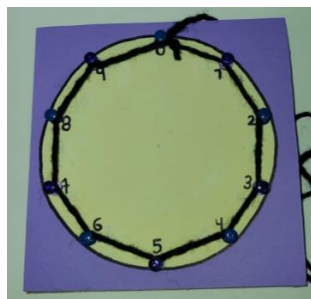


Tabla del 1. Fotografía del material elaborado por los autores.

Ahora veamos el ejemplo de conteo de 2 en 2 con la tabla del 2.

Partiendo del cero vamos a pasar a la posición del 2, como estamos realizando la representación de la tabla del 2 vamos a contar de dos en dos para ir ubicando nuestra cuerda en la posición indicada por el conteo. Después de la posición 2 vamos a contar “dos más” llegando a la posición 4, luego nuevamente “dos más” llegando a la posición 6, continuando el conteo al estar en la posición 8 nuevamente vamos a decir “dos más” respondiendo que se llegará a la posición 10, pero será preciso realizar la aclaración de que esta posición se asigna el número 0. Sabemos que al realizar el conteo no se llega de nuevo al cero; por el contrario, se agrega una decena, pero solo se simboliza con la cifra de las unidades, por lo cual se vuelve al 0, culminándose así la tabla del 2, que queda como se observa en la siguiente imagen:

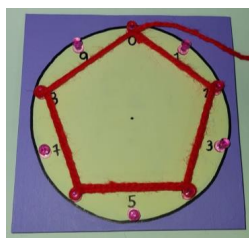


Tabla del 2. Fotografía del material elaborado por los autores.

Seguida de la posición 10 se continúa el conteo de 2 en 2 y se llega a la posición 12, como sabemos esta va a ser representada por el número 2 pero en el conteo verbal que llevamos se dirá “posición 12”, de la misma manera se continúa con la posición 14, posición 16, posición 18 y por último a la posición 20 llegando de nuevo al 0.

Al terminar la explicación el/la profesor/a, les indicará a los estudiantes que ahora ellos deben continuar con las siguientes tablas de multiplicar, de manera similar.

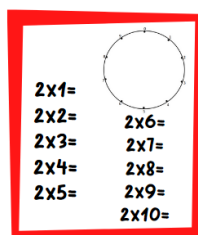
Anexo 2. Uso de la tarjeta tipo 1

En el documento para descarga de las tarjetas que hacen parte del kit del círculo Waldorf (<https://tinyurl.com/2efgdgsc>) se encuentra la tarjeta de tipo 1, en estas se puede observar el círculo Waldorf completamente vacío, con el fin de que los estudiantes mediante la instrucción del profesor puedan replicar las figuras exploradas con el círculo Waldorf físico, con ayuda de una regla y un marcador o simplemente con el pulso del estudiante. Cada estudiante deberá realizar el conteo de forma mental y dibujar los trazos en la tarjeta con ayuda del marcador, se dará el proceso mediante la indicación por parte del profesor del número de la tabla a dibujar.

Anexo 3. Uso de la tarjeta tipo 2

Al terminar con la exploración de las tarjetas tipo 1, el profesor dispondrá para cada uno o por los grupos de trabajo las tarjetas tipo 2. Se recomienda que este uso sea de forma individual puesto que es un material que puede utilizarse como refuerzo (post – instruccional) del aprendizaje de las tablas de multiplicación.

Estas tarjetas tienen un círculo Waldorf en blanco y las tablas de multiplicación para completar su resultado como se muestra enseguida:



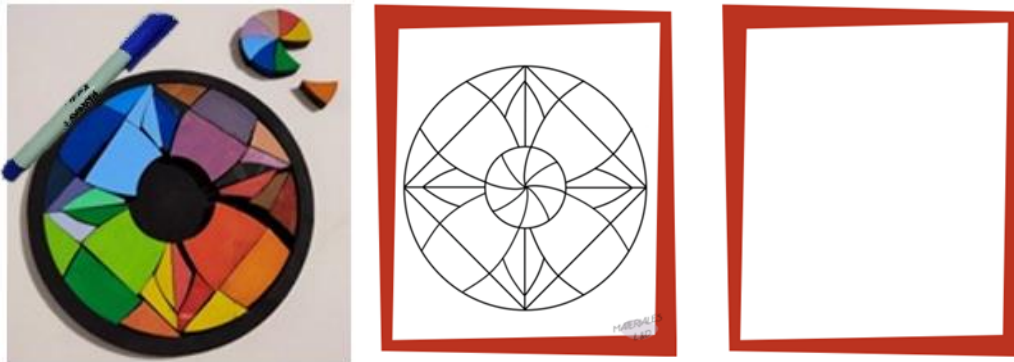
Tarjeta tabla del 2. Imagen del material realizado por los autores

Por indicación del profesor con la tarjeta de la tabla del 1 les mostrará a los estudiantes que con ayuda de un lápiz van a aludir a que el resultado de cada posición que tomen con la lana

corresponderá con el resultado de la tabla de multiplicación de forma sucesiva; es decir, en la posición 1 va ser 1 el resultado de la primera multiplicación de la tarjeta, en la posición 2 el 2 va ser el resultado de la segunda multiplicación de la tarjeta y así sucesivamente con todas las multiplicaciones.

El profesor dará la instrucción a los estudiantes que deben repetir el proceso con las demás tarjetas de forma individual o grupal. De la anterior forma los estudiantes van a aludir a las figuras resultantes con una tabla de multiplicación particular.

Kit mandala Waldorf



Kit mandala Waldorf. Fotografía y diseños del material elaborado por los autores.

Materiales para su elaboración:

- Base circular de cartón paja.
- Papel foami de colores.

Descargable para imprimir: <https://tinyurl.com/2ofcfsrp>

En la pedagogía Waldorf se busca que la enseñanza no se reduzca solo a la presentación de contenidos matemáticos abstractos y su posterior memorización, sino que es importante que los estudiantes tengan la posibilidad de explorar e interactuar primeramente con material tangible que pueda dejar en ellos registros visuales con el que los contenidos matemáticos abordados puedan ser asociados a estos registros.

Descripción del kit

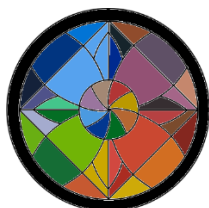
Este kit, consta de la mandala Waldorf, que es un artefacto similar a un rompecabezas, trae 40 piezas de diferentes colores, formas y tamaños. Puede ser utilizado para construir la figura original de mandala o pueden ser construidas formas artísticas y simétricas. Por otro lado, este kit viene con un paquete de tarjetas laminadas de dos tipos: el primer tipo de tarjetas tiene el croquis de la mandala Waldorf para ser coloreado con marcador borrable. Con el segundo tipo de tarjetas se tiene la intención de escribir números enteros en cada división para escribir fracciones.

Noción de fracción e interpretación parte-todo con la “Fracdala”			
Material: Mandala Waldorf			
Requisitos	Verificar que los estudiantes: <ul style="list-style-type: none"> • Sepan contar. • Utilicen números naturales en distintos contextos para expresar conteos. 		
Objetivos o meta	Comprender la noción de fracción a partir de la relación parte todo.		
Correspondencia con la pedagogía Waldorf	<ul style="list-style-type: none"> • Exploración. • Creatividad. • Construir figuras artísticas con el material manipulativo. • Aprendizaje mediante registros visuales. 	Estándar(es) básico(s) de competencias matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> • Interpreto las fracciones en diferentes contextos: relaciones parte todo.
		Aspectos del pensamiento numérico	<ul style="list-style-type: none"> • Comprensión del significado de los números. • Comprensión del significado de las operaciones y sus relaciones.
		Contenido(s) del pensamiento numérico asociado(s) a la tarea	Noción de fracción a partir de la relación parte todo.
Utilidad	Co-instruccional	Posible grado escolar	5° - 6°
		Septenio	2 (8-14)
Asuntos matemáticos relacionados con el tema del pensamiento numérico y sistemas numéricos	<p>La interpretación de las fracciones como relación parte-todo se produce cuando un todo (continuo o discreto) se divide en partes iguales. La fracción (propia), en esta interpretación, indica la relación existente entre el todo, que recibe el nombre de unidad, y el número de partes que se consideran de dicha unidad.</p> <p>En un principio se presenta la <i>Fracdala</i> con sus 40 piezas como la unidad, de modo que las fracciones trabajadas sean interpretadas con la relación parte-todo en la que se compare cierta cantidad de piezas tomadas de un total de 40.</p>		





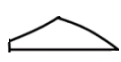

	<p>Seguidamente, pueden ser trabajadas otras unidades y fracciones con denominador diferente a 40.</p> <p>Se pretende que los estudiantes asocien las representaciones de fracciones con imágenes de figuras artísticas que puedan construir con diferentes cantidades de las fichas de la <i>Fracdala</i>.</p>
<p>Proceso por desarrollar atendiendo a la pedagogía Waldorf</p>	<p>Se pretende con la manipulación de la mandala que los estudiantes puedan:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identificar el concepto de unidad como el <i>todo</i>. • La unidad puede cambiar respecto a la cantidad de partes de las que esté conformada. Por ejemplo: Toda la mandala puede ser vista como el todo, compuesta por 40 piezas. Sin embargo, el círculo central puede ser visto como <i>otra unidad</i> formada por 8 piezas. La cantidad de dos piezas puede ser representada por $2/8$.

Secuencia de enseñanza: significado de número fraccionario

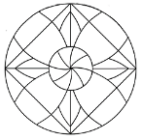
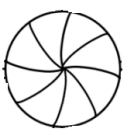
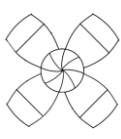

1. Organizar el grupo de estudiantes en parejas con el material para cada equipo:
 - Fracdala desarmada (con las piezas desorganizadas, fuera de la base).
 - Tarjetas para colorear
2. Indicar a los estudiantes armar la fracdala. Puede ser de ayuda compartirle una imagen guía para los equipos por si es su primera vez interactuando con el material. Simultáneamente, mientras cada pareja de estudiantes arma la fracdala en su base, el docente encargado puede preguntar las características de las fichas de las que este material está compuesto.
 - ¿Cuántas fichas son en total?
 - ¿Hay fichas con características en común?
 - ¿Hay fichas con la misma forma y mismo tamaño?, ¿cuántas?



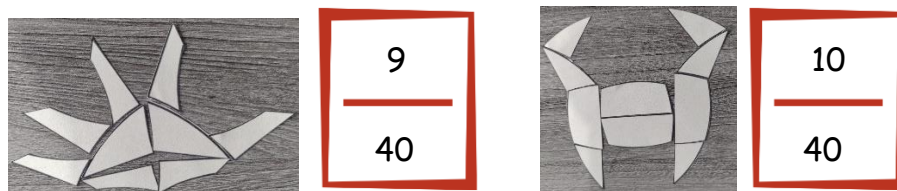
3. Para las preguntas planteadas en el ítem anterior, cada equipo puede elaborar en su cuaderno, un registro de la cantidad de figuras según su forma. Dejar a la creatividad de cada equipo cómo presentar esta información. Sin embargo, se muestra a continuación una tabla como ejemplo para guía del profesor:

Tipo de ficha						
Cantidad de fichas	8	4	4	8	8	8

4. El profesor encargado puede generar diálogo entre los estudiantes para trabajar también procesos de visualización, preguntando cuáles figuras pueden reconocer cuando la *Fracdala* esté completa en su base. Esto se plantea con el objetivo de que los estudiantes reconozcan otras formas que más adelante pueden ser utilizadas como nuevas unidades y así abordar fracciones con otros denominadores. Como por ejemplo las siguientes formas, con diferentes cantidades de fichas pueden ser utilizadas como unidades diferentes.

Ejemplos de unidad				
Cantidad de fichas (Denominador)	40	8	16	28

5. Luego, el docente puede indicar a los estudiantes sacar sus paquetes de tarjetas y puede solicitar que ellos las describan y preguntar para qué podrían servir estas tarjetas. La idea es que los estudiantes propongan el trabajo, puede dar pistas para encaminarlos a proponer colorear y escribir con los marcadores borrables sobre las tarjetas.
6. El profesor dispondrá de sus tarjetas y explicará el uso de estas para que los estudiantes colorean en ellas las fichas que extraigan de la base y representen con numerales, en la tarjeta correspondiente, esa cantidad extraída sobre la cantidad total de fichas que conforman la unidad sobre la cual se esté trabajando. (Anexo 1)
Paralelamente los estudiantes pueden ir registrando estas figuras y los resultados que van obteniendo en sus cuadernos, de modo que, luego de explorar y abordar diferentes dibujos se explique una fracción a partir de esta interpretación parte todo, explicando cuál es el numerador y cuál el denominador.
7. Como trabajo adicional, el profesor puede motivar a los estudiantes a construir otras figuras y formas artísticas con las fichas, y teniendo en cuenta la unidad considerada, establecer un asocio de esta representación física y artística con la representación simbólica como fracción. Como ejemplos se presentan las siguientes formas:



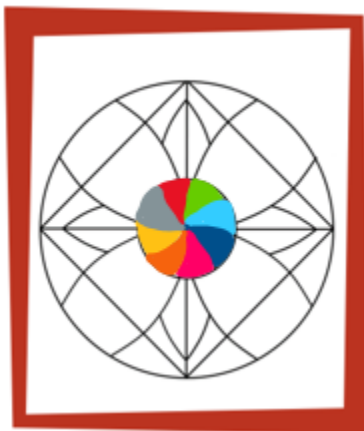
Otras ideas para inspirar a profesores

1. Abordaje de fracciones equivalentes.
2. Adición y sustracción de fracciones homogéneas.
3. Hacer un trabajo “*análogo*” al planeado en esta tarea con fracciones desde su representación continua (relacionando las fracciones con la superficie de las fichas) mediante la implementación de distintas mandalas que logren dar cabida a este tipo de fracciones.

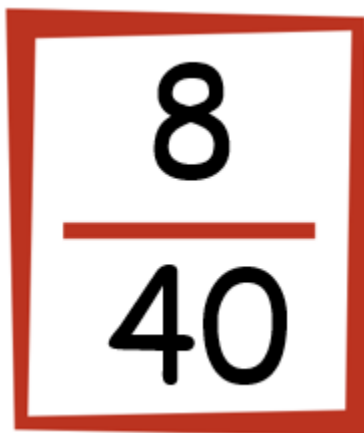
Anexos**Anexo. Uso de las tarjetas**

En la presentación del Kit mandala Waldorf, encontrará un imprimible de las tarjetas (<https://tinyurl.com/2ofcfsrp>), las cuales podrá laminar con papel adhesivo transparente con el objetivo de que puedan ser rayadas con marcador borrable por los estudiantes o por quien esté interesado en hacer uso de este material.

En este imprimible encontrará dos tipos de tarjeta, uno de ellos tiene el croquis en blanco y negro de la mandala Waldorf cuya finalidad es colorear sobre ella las figuras o fichas que se vayan extrayendo de la base de la mandala, o bien, se dejen estas en la mandala.



Simultáneamente, se hará uso de la tarjeta del otro tipo, con la cual se representará la fracción asociada a la figura coloreada. Por ejemplo, según la figura anterior, se pintaron 8 fichas. Si se trabaja como unidad toda la mandala (las 40 fichas), la fracción asociada a este registro visual es $8/40$.



Kit arcoíris Waldorf



Materiales para su elaboración:

- Superficie de cartón, cartón paja o madera.
- Silicona caliente y pistola.
- Papel periódico.
- Colbón.
- Lana o hilos para medir.

Tutorial para su elaboración: <https://www.youtube.com/watch?v=Axajw4Ezmx4>

Descargable para imprimir: <https://tinyurl.com/2j7ucjbg>

El arcoíris Waldorf es un material didáctico que permite la creación libre a los estudiantes y el máximo desarrollo de su imaginación y creatividad. Además, como se trata de un artefacto de construcción y de manipulación, ayuda a mejorar la concentración, el razonamiento, la coordinación de movimientos, la coordinación mano-ojo, el desarrollo de la psicomotricidad fina y de la organización espacial.

Este material puede favorecer el aprendizaje de conceptos matemáticos como las diferentes medidas, las simetrías, las seriaciones, etc.; así como el aprendizaje de vocabulario referente a los colores y los tamaños. Sin embargo, en esta ocasión el arcoíris Waldorf será utilizado para introducir uno de los números irracionales que muestra la relación entre el diámetro y el perímetro de una circunferencia.

Descripción del kit

El kit arcoíris Waldorf consta de un conjunto de siete (7) arcos de cartón o madera con los colores principales en los que se descompone la luz (morado, azul, celeste, verde, amarillo, naranja y rojo). Adicionalmente este kit, para el propósito de la siguiente tarea, trae un paquete de lanas de colores que se corresponden con los mismos del arcoíris. La finalidad de estas lanas es poder recortar trozos cuyas longitudes sean, aproximadamente, la longitud de cada semicircunferencia y los diámetros de cada una de las piezas.

Aproximando a π con el arcoíris Waldorf			
Material: Arcoíris Waldorf			
Requisitos	Verificar que los estudiantes: <ul style="list-style-type: none"> • Sepan medir. • Utilicen los números decimales en su notación decimal para expresar longitudes. • Identifiquen el diámetro y radio de una circunferencia, y longitud de un arco. 		
Objetivos o meta	Comprender la noción de los números irracionales como decimales infinitos no periódicos.		
Correspondencia con la pedagogía Waldorf	<ul style="list-style-type: none"> • Exploración. • Construcción de significados numéricos a partir de la manipulación de objetos. • Aprendizaje de conceptos abstractos mediante el contacto directo de material concreto. 	Estándar(es) básico(s) de competencias matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> • Construye varias representaciones (geométrica, decimales o no decimales) de un mismo número racional o irracional. • Utiliza las propiedades de los números reales para justificar procedimientos y diferentes representaciones de subconjuntos de ellos.
		Aspectos del pensamiento numérico	<ul style="list-style-type: none"> • Significado de los números y sus relaciones entre ellos.

			<ul style="list-style-type: none"> Hacer cálculos con fluidez y estimaciones razonables.
		Contenido(s) del pensamiento numérico asociado(s) a la tarea	<p>Aproximación al número π. Particularmente $\frac{\pi}{2}$.</p> <p>Aproximaciones.</p>
Utilidad	Pre-instruccional	Posible grado escolar	8° - 11°
		Septenio	2 y 3 (de 8 a 18 años)
Asuntos matemáticos relacionados con el tema del pensamiento numérico y sistemas numéricos	<p>Dentro del conjunto de los números reales (\mathbb{R}), existen dos subconjuntos que son disjuntos (su intersección es vacía). Estos dos subconjuntos son los números irracionales \mathbb{I} y el subconjunto de los números racionales \mathbb{Q}.</p> <p>En el conjunto de los números irracionales, los números más conocidos son $\sqrt{2}$, φ (phi) y π (pi). Es importante mencionar que es posible acceder a algunos números irracionales mediante su representación algebraica o mediante aproximaciones decimales.</p> <p>Por su parte, π es la letra que representa la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro. Sin embargo, en este trabajo es necesario recalcar que, al trabajar con semicircunferencias se procederá a calcular el doble de este cociente o razón.</p>		
Proceso por desarrollar atendiendo a la pedagogía Waldorf	<p>Se pretende que, a partir de la manipulación del arcoíris Waldorf los estudiantes puedan notar que, independientemente del tamaño de cada arco (perímetros, radios y diámetros diferentes), el doble del cociente entre el perímetro y el diámetro se va a aproximar al número π.</p>		
Secuencia de enseñanza: Aproximación al número π con el arcoíris Waldorf			
<ol style="list-style-type: none"> Organizar a los estudiantes de forma individual o grupal según la disponibilidad del kit o los intereses del docente, además, se les pedirá tijeras, regla y calculadora como complemento a la actividad. El profesor describirá el material con ayuda de los estudiantes. Posteriormente el profesor dará las indicaciones para realizar el proceso de medición del material a los estudiantes. (Anexo) 			

4. El profesor finalizará con un diálogo con los estudiantes comentando sobre cómo les pareció la actividad y que si ellos esperaban los resultados obtenidos, para posteriormente institucionalizar el número π como un elemento del conjunto de los números irracionales y como la razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro.

Otras ideas para inspirar a profesores

4. Utilizar el arcoíris Waldorf para adquirir nociones de clasificación (colores, tamaños) y comparación (es más grande que / es más pequeña que) en el primer septenio (hasta los 4 años).
5. Compara y ordena objetos de acuerdo con atributos como altura, peso, intensidades de color, entre otros (para los más pequeños).





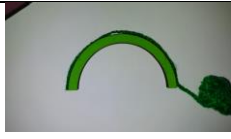

Anexos

Anexo. Proceso de medición y exploración.

Esta propuesta de exploración se encontró viable y algo distinta a las convencionales con ayuda del arcoíris Waldorf puesto que puede ser tomado como ventaja utilizar el perímetro de la semicircunferencia de cada arco y el diámetro de cada uno de estos para mostrar la relación que conlleva establecer un cociente y así determinar el número π .






El profesor con ayuda de una presentación en el tablero o con ayuda de alguna herramienta digital, o explicando con sus propias palabras, les mostrará a los estudiantes con el fin de explorar el material las siguientes indicaciones:

1. Mide los bordes y el diámetro de los arcos de color rojo, naranja, amarillo, verde, azul, celeste y morado con ayuda de las lanas y recorta estas en la medida que te de cada una de las piezas. Se espera que los estudiantes realicen el siguiente proceso:






Arco	Proceso de medición del diámetro	Proceso de medición del borde o arco	Corte de las lanas con la medida del diámetro y arco
Rojo			
...			
Verde			
...			



2. Posterior al proceso anterior, se les pedirá a los estudiantes que realicen la medición de cada una de las lanas con ayuda de una regla y reporten los datos obtenidos en el cuaderno. (Se le puede indicar a los estudiantes que realicen una tabla con tres columnas, una que indique el color del arco, otra el valor en centímetros del arco y otra con el valor en centímetros con el diámetro).

Arco					
Medida del borde externo	28,2 cm	25 cm	22 cm	18,9 cm	15,7 cm
Longitud del radio	9 cm	8 cm	7 cm	6 cm	5 cm

3. Después de que los estudiantes obtengan los valores numéricos solicitados, el profesor les indicará que deben añadir dos filas más a la tabla para hallar el cociente entre la medida del borde externo y la longitud del diámetro, y también el doble del cociente descrito, como se muestra a continuación:

Arco					
Medida del borde externo (P)	28,2 cm	25 cm	22 cm	18,9 cm	15,7 cm
Longitud del diámetro (D)	18 cm	16 cm	14 cm	12 cm	10 cm
P/D	1,56666	1,5625	1,5714	1,575	1,57
$2 \times (P/D)$	3,133	3,125	3,1428	3,15	3,14

4. Luego de completar las nuevas filas, el profesor les va a pedir a los estudiantes, que planteen una conjetura a partir de los resultados hallados en la tabla anterior. (con el fin de que se estaría favoreciendo el proceso de generalización)
5. El profesor dará un espacio para que los estudiantes traten de plantear alguna conjetura, luego les ayudará a plantear la conjetura: *“El doble del cociente entre la longitud de cualquier semicircunferencia del arcoíris Waldorf y el diámetro de esta es aproximadamente 3,14.”*
6. Posteriormente, les ayudará a representar esta conjetura con el uso de expresiones simbólico-algebraicas para llegar a que el cociente entre la longitud de una circunferencia cualquiera y su diámetro es aproximadamente **3,14** y así introducir a π .
7. Con el anterior proceso el profesor ya puede enfatizar que π es un número irracional y que por lo tanto no tiene expresión decimal finita (con el método que le parezca más conveniente). Y explicar que esta es solo una aproximación. Una idea sería ver un video como el siguiente (<https://www.youtube.com/watch?v=d1d4g0TcJUY>) teniendo en cuenta que en internet hay variedad de ejemplos.

Anexo F

Formulario de validación

Presentamos a continuación, como ejemplo, la estructura del formulario y de las preguntas para dos de las tareas elaboradas.



Evaluación de tareas matemáticas - Pedagogía Waldorf

Este formulario se realiza con la intención de recoger información para **evaluar cuatro tareas matemáticas** para desarrollar el pensamiento numérico y los sistemas numéricos en estudiantes entre los 7 y 18 años de edad (segundo y tercer septenio, en términos de la pedagogía Waldorf). Este formulario está relacionado con nuestro trabajo de grado titulado "*Materiales didácticos para aprender matemáticas desde la Pedagogía Waldorf*", para optar al título de Licenciados en Matemáticas.

Solicitamos amablemente responder con total sinceridad y desde una mirada crítica, pues esto nos permite ampliar y sustentar nuestra propuesta de tareas y material didáctico para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y dejar así, a disposición de la comunidad académica, materiales propios de la pedagogía Waldorf en el laboratorio de didáctica de las matemáticas de la UPN.

Para responder a este formulario, usted podría tardar máximo 80 minutos (leyendo a un ritmo regular), le agradecemos compartir con nosotros parte de su valioso tiempo.

Me identifico con el género... *

- Femenino
- Masculino
- Otro
- Prefiero no mencionarlo

Seleccione la opción que más se adecúa a su situación. Me desempeño como... *

- Profesor(a) de matemáticas en formación inicial
- Profesor(a) de matemáticas en ejercicio
- Maestro(a) Waldorf
- Profesor(a) de primaria
- Profesor(a) de una o más áreas distintas a las matemáticas
- Profesor(a) que enseña matemáticas
- Otra

Por favor acceda, a través del siguiente enlace (contenía el enlace de la primera versión de la cartilla), a la cartilla que hemos construido, la cual incluye cuatro tareas para el aprendizaje de las matemáticas con el uso de materiales Waldorf. Dele una mirada global y le agradecemos leer en detalle la "Presentación". En relación con la presentación, seleccione aquellas proposiciones con las que está de acuerdo.

- La intencionalidad de la cartilla es clara.
- La organización de la cartilla es clara.
- Se entiende de qué trata la pedagogía Waldorf.
- La descripción de los septenios sobre los cuales versa la cartilla están descritos suficientemente.
- Se explicitan con claridad los materiales propios de la pedagogía Waldorf que serán utilizados en las tareas que se propondrán en la cartilla.

Me interesa (gustaría) aportar a la evaluación de... *

- Tareas de primaria
- Tareas de secundaria
- Tareas de primaria y secundaria

La utilidad de la tarea corresponde con el objetivo.

La descripción de la secuencia de enseñanza es apropiada.

Las ideas para inspirar a profesores con la tarea son entendibles.

Las ideas para inspirar a profesores son desarrollables.

Es viable el desarrollo de la tarea.

¿Es viable la implementación de la tarea? *

- Sí
- No

Justifique su respuesta para la pregunta anterior *

Tu respuesta

¿Implementaría esta tarea con estudiantes en la clase de matemáticas? *

Sí

No

Responda brevemente, ¿por qué sí o por qué no implementaría esta tarea con estudiantes en la clase de matemáticas? *

Tu respuesta

¿Qué cambios le haría a esta tarea? *

Tu respuesta

¿Qué le gustó de la tarea? *

Tu respuesta

¿Qué no le gustó de la tarea? *

Tu respuesta

Tarea 2 - Kit círculo Waldorf

Las siguientes preguntas corresponden a la evaluación de la propuesta de tarea que hace uso del **kit círculo Waldorf**.



La utilidad de la tarea corresponde con el objetivo.

La descripción de la secuencia de enseñanza es apropiada.

Las ideas para inspirar a profesores con la tarea son entendibles.

Las ideas para inspirar a profesores son desarrollables.

Es viable el desarrollo de la tarea.

¿Es viable la implementación de la tarea? *

Sí

No

Justifique su respuesta para la pregunta anterior *

Tu respuesta

¿Implementaría esta tarea con estudiantes en la clase de matemáticas? *

Sí

No

Responda brevemente, ¿por qué sí o por qué no implementaría esta tarea con estudiantes en la clase de matemáticas? *

Tu respuesta

¿Qué cambios le haría a esta tarea? *

Tu respuesta

¿Qué le gustó de la tarea? *

Tu respuesta

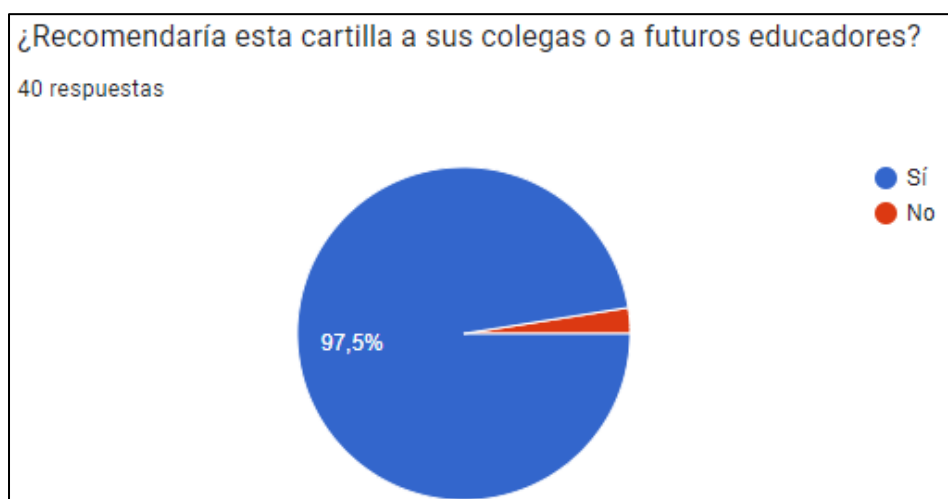
¿Qué no le gustó de la tarea? *

Tu respuesta

Anexo G

Respuestas de participantes en el formulario de validación de las tareas diseñadas.

Las afirmaciones presentadas en la siguiente tabla son respuestas de los participantes en el formulario de validación de la cartilla de tareas respecto a si ellos la recomendarían a otros educadores matemáticos este producto elaborado por los autores. El 98% de los participantes (39 personas) respondió que sí la recomendaría. A continuación se presenta por qué si o por qué no lo harían.



¿Por qué sí recomendaría la cartilla? o ¿Por qué no la recomendaría?
tiene una mirada distinta de algunos objetos que en la cotidianidad no se considerarían materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas...
Si la recomendaría. Tiene buenas estrategias para implementar
La recomendaría por los comentarios que realice anteriormente sobre las actividades
Recomiendo esta cartilla porque se proponen actividades fuera de lo tradicional donde nuestros estudiantes pueden ver las matemáticas desde otro punto de vista. Desde mi percepción considero que son actividades que podrían garantizar un aprendizaje significativo, además, un aspecto muy valioso que pude evidenciar es que son actividades con sentido para los estudiantes, es decir, el conocimiento que están construyendo parte de un determinado contexto en donde los saberes matemáticos que logran construir cobran un sentido.
Es importante romper con lo tradicional y tener apertura al cambio

Porque tiene materiales manipulables y los conceptos que se abordan con estos son necesarios en la educación matemática escolar.
La recomendaría porque es practica y sus materiales fáciles de elaborar
Recomendaría esta cartilla a mis compañeros, pues en la asignatura de matemáticas a veces resulta difícil encontrar material concreto tan bien descrito y con un objetivo tan claro. Esta cartilla ayuda al proceso de enseñanza-aprendizaje, logrando desarrollar las competencias descritas en la misma.
La recomendaría, puesto que, es un recurso importante en el aprendizaje de las matemáticas y permitirá que los estudiantes pierdan temor hacia las matemáticas y le ahorraría a los docentes el diseño de material, lo cual facilita la labor docente.
Porque la cartilla presenta distintos materiales didácticos que no conocía y me parece importante que más personas los conozcan y pongan en práctica en el aula. Por otro lado, la cartilla está muy bien estructura, su contenido es sencillo de entender, la precisión de cada una de las secuencias de tareas resulta importante para comprender el rol del docente y del estudiante cuando se lleva a cabo cada tarea y además, se contemplan distintos aspectos tanto didácticos como matemáticos que se logran abordar en cada una de las tareas.
Con el material tangible y con los materiales tan asequibles que propone la cartilla, le da herramientas al maestro para dar clases más completas y significativas para los estudiantes que están presentes en su aula.
Creo que hoy en día hay muchos profesores con una enseñanza muy tradicional. La cartilla ayudaría a qué dichos profesores puedan cambiar ese aspecto
La recomendaría porque son temas importantes a tratar y además es una manera Didáctica apropiada de enseñanza
material practico y muy creativas las actividades
Las actividades que propone la cartilla son muy interesantes y pueden ser una gran herramienta en el aula especialmente en primaria, se puede incluso adaptar a los recursos que tenga el profesor sin perder su esencia.
Porque este tipo de actividades son muy poco implementadas y generalmente los estudiantes están cansados del mismo modus operandi de sus maestros. Implementar esta actividad les proporcionará motivación para realizar las tareas y así facilitar el aprendizaje.
Me gusta que propongan actividades diferentes y con material concreto.
Es material diferente
Porque permite conocer unas actividades y una pedagogía diferente que tal vez es muy desconocida para muchos además de que incentiva a la creación de este tipo de actividades.

la recomendaría ya que es una herramienta para mejorar la profesión docente y los diferentes métodos de enseñanza y aprendizaje.
Si las recomendaría porque son actividades que no se llevan usualmente a las clases de matemáticas
Tiene unas propuestas de actividades interesantes para introducir la noción de algún objeto matemático. Además, me gusta el enfoque artístico que tiene y la propuesta de lectura
Sí la recomendaría porque son ideas llamativas para los estudiantes y son tareas en dónde el rol del estudiante es activo y están diseñadas para que sean ellos los constructores de su conocimiento
La recomendaría porque las actividades propuestas son interesantes y van a brindar a los alumnos una experiencia agradable y significativa
La recomendaría porque, considero que son tareas que se pueden implementar en los colegios cuya pedagogía no sea la pedagogía Waldorf. Ya que, los materiales son sencillos de utilizar y el concepto que se aborda en cada uno de ellos es algo estipulado en el currículo Colombiano.
Es interesante el trabajo realizado y permite a los estudiantes explorar conceptos matemáticos desde material concreto
Para que los educadores tengan más opciones
Me parece que puede abrir el panorama hacia nuevas estrategias que se pueden llevar al aula para la clase de matemáticas, además en mi caso no conocía para nada esa propuesta de pedagogía
Es importante que, se empapen de nuevas estrategias para enseñar matemáticas en el aula.
La recomendaría para que otros aceptarán el reto de cambiar la educación que hoy en día conocemos, mediante "pequeños" cambios que se generarían desde el mismo ser del educador en cuestión. Para un estudiante es muy significativo un aprendizaje mediante elementos que instruyan el aprendizaje siendo el educador un mediador entre los componentes del aula. (Conocimiento - Material a emplear - Aprendizaje)
Me parece importante mirar nuevas maneras para la enseñanza de las matemáticas, las tareas están bien explícitas y orientadas, por tal motivo me arriesgaría a comentarla con otros docentes de matemáticas
Porque me pareció interesante, didáctica y diferente
Actividades muy divertidas y que fomentan el desarrollo de los contenidos propuestos.
Me parece interesante abordar esta pedagogía.
Me parece que es de esas propuestas de trabajo de grado o estrategias didácticas que los profesores que se cuestionan la enseñanza están buscando constantemente. Además, permite de manera clara y entendible usar material físico alejándose un poco de las TIC que usan los estudiantes en todos los espacios, diversificando la enseñanza y permitiendo

Llevar estas estrategias a esos lugares olvidados que tenemos en nuestro país y que carecen de internet.
Nuevas formas de enseñanza
Es novedoso no conocía ni el modelo ni la teoría
Si la recomendaría porque es un buen material que nos puede ayudar.
Por lo expuesto anteriormente.
Es una buena innovación siempre y cuando se ajusten algunos elementos que se deben fortalecer